微积分之美

杜耀刚　编　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内 容 简 介

微积分从酝酿到萌芽，到建立、发展、完善，凝结着两千多年来无数数学家的心血才谱写完成，可以说是美的交响乐。微积分之美，美在简单、和谐、对称、奇异，更美在原创。微积分之美，集多年教学激情体验，探索微积分的数学艺术，培养莘莘学子对数学崇高的敬意：数学中有美、美中有数学；提升他们的创新创业能力，深入科技最新发展前沿，跟随用微积分改变人们看待宇宙方式的数学之旅，使学生相信数学与诗一样，都充满了人类的精神力量。本书主要内容有函数、极限和连续；导数与微分；中值定理及其应用；不定积分；定积分。每章节涉及名人名言、内容提要、问题探究等，通过 222 道例题简要阐述美中有数学、数学中有美的具体含义。

本书可以作为高等院校理工科各专业的教材使用，也是广大学生和教师必备的重要参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

微积分之美 / 杜耀刚编著. —北京：电子工业出版社，2018.2

ISBN 978-7-121-33697-3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①杜… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 029428 号

策划编辑：杨　波
责任编辑：裴　杰
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：10　字数：256 千字
版　　次：2018 年 2 月第 1 版
印　　次：2018 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：38.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254584。

21 世纪的劳动者应该懂得微积分初步。

——[德]菲利克斯 · 克莱因（Felix Klein，1849—1925）/哥廷根学派创始人

微积分学，或者数学分析，是人类思维的伟大成果之一。它处于自然科学和人文科学之间的地位，使它成为高等教育的一种特别有效的工具。

——理查德 · 柯朗（Richard Courant，1888—1972）/美籍德国数学家、哥廷根学派重要成员

只有采取无穷小的观察单元——历史的微分，并运用积分的方法得到这些无穷小的总和，我们才能得到问题的答案——历史的规律。正是这门学问（微积分），纠正了人类由于只观察个别单元所不能不犯下的和无法避免的错误。

——列夫 · 尼古拉耶维奇 · 托尔斯泰（Lev Nikolayevich Tolstoy，1828—1910）/俄国思想家、现实主义文学的一坐丰碑

社会的进步就是人类对美的追求的结晶。

——卡尔 · 马克思（Karl Marx，1818—1883）/马克思主义创始人，国际共产主义的奠基者

导　言

沁园春—数学[①]

数学风光，无限魅力，万千符号；望银河内外，奥秘茫茫，空间变幻，数浪滔滔，线舞银蛇，图驰蜡象，欲与珠穆朗玛峰试比高，须回味。

赏图装数裹，分外妖娆，数学如此多娇，引无数英才竞折腰，惜语文英语，略输严谨，科学社会，稍逊精巧，现代工具，手机电脑，只能遵其命令指标，俱往矣，数科目奇葩，数学首当！

（1）数学的应用：数学改变了我们看待宇宙的方式。

数学物理中的频谱分析概念与快速变换密切相关。傅里叶变换是一种积分变换，它来源于函数的傅里叶积分表示。令人吃惊的是，这一方法已被成功应用于文学研究。文学作品中的微量元素，即文学的“指纹”，就是文学的风格，其判断的主要方式是频谱分析。日本有两位著名作家——多正九和安本美典大量应用频谱分析来研究各种文学作品。最后研究到这种程度：随便拿一本书来，不讲明作者，也可以知道作者是谁。这就像法医根据指纹抓犯人一样，准确无误。

哲学与数学之间的交互影响是人类文化中最深刻的部分。数学家德穆林（Demollins，1869—1947）说的好：“没有数学，我们就无法看透哲学的深度；没有哲学，人们也无法看透数学的深度；若没有两者，人们就什么也看不透。”哲学为人类文明提供了理性精神，而对理性精神贯彻最彻底的是数学。例如，数学的无限、连续的概念，一出现便成为了哲学研究的对象。自古以来，唯物主义与唯心主义的斗争就贯穿于数学的全部历史，并且数学对逻辑的发展有着明显的作用。

万有引力的发现与证明。16 世纪后期，天才的观察家，丹麦天文学家第谷 · 布拉赫（Tycho Brahe，1546—1601），对太阳系中的行星运动进行了长达 20 多年的观察，积累了大量的丰富的资料，为历法改革奠定了基础。其助手——天空的立法者——德国天文学家、物理学家和数学家约翰内斯 · 开普勒（Johannes Kepler，1571—1630）曾参与了一部分观察工作，

① 叶立军．数学与科学进步．杭州：浙江大学出版社，2011.

并继承了他的全部数据，又进行了 20 年之久的研究，开普勒提出了行星运动的三个定律。这不禁使我们想起英国数学家、哲学家怀特海（Alfred North Whitehead，1861—1947）的名言："物质未曾来到，精神先已出现"。

开普勒第一定律（椭圆定律）：行星（运动方程的极坐标形式为 $z(t)=r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}$）绕太阳运行（公转）的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点上，其椭圆极坐标方程为 $\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho}+\frac{\varepsilon}{\rho}\cos\theta\Rightarrow\ddot{r}=\frac{\varepsilon h^2}{\rho\cdot r^2}\cos\theta$。其中：$b=\sqrt{a^2-c^2}$，$\rho=\frac{b^2}{a}$，$\varepsilon=\frac{c}{a}$，两焦点的距离为$2c$；

开普勒第二定律（面积定律）：向径的面积速度是常数，即从太阳到行星的向径在相等的时间内扫过相同的面积，即面积速度 $\dot{A}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{h}{2}$（常数）。其中，椭圆面积为 $\frac{1}{2}hT=\pi\cdot ab\Rightarrow h=\frac{2\pi\cdot a\cdot b}{T}$；

开普勒第三定律（调和定律）：椭圆轨迹的长轴的立方与其公转周期的平方之间的比值是和行星无关的常数，即$T^2=\lambda a^3$。

1687 年，艾萨克·牛顿（Issac Newton，1642—1727）用微积分等工具由开普勒定律得到万有引力定律。根据牛顿第二定律及 $\ddot{r}=\frac{\varepsilon h^2}{\rho\cdot r^2}\cos\theta$，行星运动方程的极坐标形式为 $F_\theta=m\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)=0$，$F_r=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-km\frac{1}{r^2}$，其中 $k=\frac{h^2}{\rho}$；再根据 $r^2\dot{\theta}=h=\frac{2\pi\cdot a\cdot b}{T}$ 及 $T^2=\lambda a^3$，得到$k=\frac{h^2}{\rho}=\frac{4\pi^2}{\lambda}$（常数），即$F_r=-km\frac{1}{r^2}$，这就是说：行星所受的力指向太阳，它的大小与行星的质量成正比，与行星到太阳的距离的平方成反比。牛顿正是从这些结论出发，通过进一步的思考，总结出著名的万有引力定律的。从万有引力定律推导开普勒第三定律见例 5-2-16。

万有引力定律成功预言了海王星的存在。对木星和土星的轨道的推算结果和实测不符，而天王星存在着不可忽略的差异，"是否存在一颗尚未发现的行星干扰着天王星的运行呢？"1843 年，英国剑桥大学 22 岁的学生亚当斯（J. C. Adams，1819—1892）根据力学原则，利用微积分等数学工具，算出了未知行星的位置。比亚当斯稍晚，法国巴黎天文台青年数学家勒维列（U. J. J. Leverrie，1811—1877）于 1845 年解出了由几十个方程组成的方程组，并于 1846 年算出了新行星的轨道。海王星被发现了，这是人类最早用笔头算出的行星，这个发现是数学计算的胜利，并产生了很大的影响。

（2）数学与素质教育：从心所欲，不逾矩。

数学不仅是一种工具，还是一种思维模式；不仅是一种知识，还是一种素养；不仅是一种科学，还是一种文化，能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志。数学教育在培养创新人才中具有其独特的、不可替代的重要作用。

中国古代思想家孔子（Confucius，公元前 551—公元前 479）讲的"知之者不如好之者，好之者不如乐之者"，就是说教育的目的就是自发、自觉和创造。孔子到了七十岁总结了一生在学问方面的成就，是"从心所欲，不逾矩"。我们可以用这句话来概括中西教育之结合，"从心"就是创造力的启发，"不逾矩"就是严密的基础训练。

哈佛大学于 1636 年建立，当时没有一个数学教授；1726 年，哈佛大学任命了第一位数学教授。当时的入学考试只考算术，1820 年，要求考代数；1844 年，要求考几何。1971 年 2 月，美国卡尔 · 多伊奇等人在《科学》上发表了一项研究报告，列举了 1900—1965 年间在世界范围内社会科学方面的 63 项重大成就，其中数学化的定量研究占三分之二，而这些定量研究中的六分之五是 1930 年以后做出的。美国著名社会学家贝尔（Daniel Bell，1919—2011）在《第二次世界大战以来的社会科学》一书中就指出：社会科学正在变成像自然科学一样的硬科学[①]。

数学已经拓展到每一个科学领域，并且在生物学、物理学、化学、经济学、社会学和工程学，甚至是任何一个涉及速度或温度变化量的领域中，扮演着无法替代的角色。美国科普鬼才克利福德 · 皮寇弗（Clifford A. Pickover）曾说："对我而言，不论是心智的特质、思想的极限，或者是人类相对于浩瀚宇宙所处的环境，都可以用数学来发掘其中永无止境的惊奇奥秘。"[②]

（3）数学、物理及计算机：学好数理化，干啥都可以。

1957 年前苏联人造卫星发射成功，震惊了美国，美国从官方到民间都在检查落后的原因，最终得出的结论是数学教育落后于前苏联。20 世纪所有的重大发明中，计算机的发明应该排在首要位置，现代有记忆功能的计算机在 1946 年诞生于美国，其设计者冯 · 诺伊曼（John von Neumann，1903—1957）就是一位搞基础数学的美藉匈牙利数学家，著名北大方正的创始人、中国计算机专家王选（Wang Xuan，1937—2006）教授也毕业于数学系。计算机和计算机科学技术的出现，在理论推导和科学实验两大传统手段外，又增添了人类发展科学的新手段，即所谓的"计算"手段。

学好数学物理到底有什么用？我们的回答就是数学与物理学结合的一大杰作是电子数字计算机，计算机使得物理学实现了数学提供的计算原理。数学、物理及计算机是每个公民科学思维训练所必需的：数学训练逻辑思维、物理训练实证思维、计算机训练计算思维。学好了数学、物理及计算机，干什么都可以。

（4）数学发展简史：从"李约瑟难题"到"陈省身猜想"。

英国哲学家弗朗西斯 • 培根（Francis Bacon，1561—1626）曾说"读史使人明智"。数学史大致可以分为五个不同的时期，精确地区分这些阶段是不可能的，因为每一个阶段的本质特征都是在前一阶段中酝酿形成的。

第一时期称为数学形成时期，人类从数数开始逐渐地建立了自然数的概念、简单的计数算法，并认识了简单的几何图形，逐渐形成了理论与证明之间的逻辑关系的"纯粹"数学。

第二时期为初等数学，即常数数学时期，从公元前 5 世纪—17 世纪，逐渐形成了初等数学的主要分支：算术、代数、几何、三角。

第三时期称为变量数学的时期，变量数学的第一个决定性步骤出现在 1637 年法国哲学家、数学家、物理学家的勒内 · 笛卡儿（René Descartes，1596—1650）著作《几何学》中，弗里德里希 · 恩格斯（Friedrich Engels，1820—1895）指出："数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了[③]……"变量数学的第二个决定性步骤是自然科学家的偶像牛顿和样样皆通的大

① 张顺燕．数学 · 科学与艺术．北京：北京大学出版社，2014.
② [美]克利福德 · 皮寇弗．数学之书．陈以礼译．重庆：重庆大学出版社，2015.
③ 恩格斯．自然辩证法．北京：人民出版社，1971.

师莱布尼茨于 17 世纪后半叶分别独立建立了微积分。

第四个时期是现代数学时期，以及所有基础部门——代数、几何和分析——深刻变化为特征。代数的解放是由四元数的诞生引起的；几何学的解放是由欧氏几何的第五公式引起的；分析的严密化是由第二次数学危机引起的。19 世纪初，数学发生了质的变化，开始了从变量向公理化数学的过渡，如没有非欧几何学，就不会有 20 世纪最伟大的科学家、思想家阿尔伯特·爱因斯坦（Albert Einstein，1879—1955）的相对论。

第五个时期就是信息数学时期。计算机的诞生和广泛使用使数学进入了一个新的时代。几乎同时，信息论和控制论也诞生了，数学迎来了一个新的高潮。信息论的创始人克劳德·香农（Claude Shannon，1916—2001）提醒人们，信息论的核心就是数学。物理学家约翰·阿奇博尔德·惠勒（John Archibald Wheeler，1911—2008）曾用了一句颇具神谕意味的、由单音节词组成的句子加以概括："万物源自比特（It from Bit）"，"任何事物——任何粒子、任何力场，甚至时空连续本身都源于信息"。

中国 2000 余年的数学发展史，可概括为从"李约瑟难题"到"陈省身猜想"的演变史。李约瑟（Joseph Needham，1900—1995）是英国著名科学史家、生物化学家，他坚定地认为蒸气机的发明来源于中国四川的水排：中国传统数学为什么在宋元以后没有得到发展？中国传统数学为什么没有发展为近代数学？为什么近代自然科学不是发生在中国古代或中古代而是发生在伽利略时代的欧洲？"陈省身猜想"：中国数学可望在 21 世纪率先赶上世界先进水平。

高级的数学未必难，低级的数学未必容易。数学培养人的耐性，更能发挥人的思考力和创造力。关于数学的特点，一般采用前苏联的亚历山德罗夫（A. D. Aleksandrov，1896—1982）的"三性"提法：抽象性、严谨性、广泛应用性。

（5）微积分发展的三个阶段：微积分是一种震撼心灵的智力奋斗的结晶。

微积分从酝酿到萌芽，到建立、发展、完善，是凝结着两千多年来无数数学家的心血才谱写完成的。现代社会正是从微积分的诞生开始的。

① 牛顿、莱布尼茨创立微积分阶段。

近代科学奠基人牛顿是英国数学家和物理学家，17 世纪科学革命的顶峰人物，他提出了近代物理学基础的力学三大定理和万有引力定律；他关于白光有色光组成的发现为物理光学奠定了基础。牛顿从运动学观点发现（约 1665 年）微积分，此发现源于他对无穷级数的兴趣，不过他发表的时间较晚。他的《自然哲学的数学原理》是近代科学史上最重要的著作。英国博物学家赫胥黎（Thomas Henry Huxley，1825—1895）对牛顿的评价是"作为凡人无甚可取;作为巨人无以伦比"。

德国数学家、哲学家莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716），从几何学的角度创建了微积分，他早在 1684 年就先发表了自己对于微分的见解，随后又在 1686 年发表了积分的论述。莱布尼茨终生奋斗目标是寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法，正是这种努力导致了许多数学的发现，最突出的是微积分。

② 数学分析的奠基人——法国数学家柯西、德国几何学家黎曼（Riemann，1826—1866）、大器晚成的德国数学家卡尔·魏尔斯特拉斯[Karl Weierstrass，1815—1897，培养出历史上第一位女数学博士，即俄罗斯数学家柯瓦列夫斯卡娅（Sofia kovalevskaya，1850—1891）]，即以他们为代表的创立现代体系微积分的阶段。我们可以用微积分解释彩虹的结构，也可以用

来在股市中赚得更多金钱，或是用微积分来说明人类的大脑结构，替航天飞机导航、进行天气预报、预测人口增长、设计建筑物和分析疾病的扩散，更可以帮助人们探索比原子还小的量子世界、描绘遥不可及的银河系。

③ 建立外微分形式阶段。只有用了外微分形式，才能真正说清楚微分与积分在高维空间中是一对矛盾，即广义斯托克斯（George Gabriel Stokes，1819—1903，英国数学物理学家）公式（见 5.2.7）：$\int_{\partial\Omega}\omega=\int\Omega\mathrm{d}\omega$。同时利用 Poincare′引理，从外微分观点看，在三维空间中只能有梯度、旋度与散度这三个度[①]。

（6）微积分的数学结构：广义斯托克斯公式。

微分、积分及指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理，在微积分中，微分与积分是一对主要矛盾；除此之外，还有其他次要矛盾，也起着重要作用。例如，离散与连续、局部与整体、有限与无限、数与形等。

原则上讲，微分中的一条定理或公式，在积分中也应有相应的定理或公式，反之亦然，即它们之间是一一对应的。

微积分的数学结构可概括为一个对象、二个极限、三个关系。

一个对象：函数（三个初等函数，即幂函数及其反函数、三角函数及其反函数、指数函数及其反函数，在复变函数论的观点下，它们可相互表达）。

二个极限：函数极限和定积分极限。

三个关系：牛顿-莱布尼茨公式（1 维、2 维和 3 维）。其统一形式就是广义斯托克斯公式（见 5.2.7）。本书重点讲解 1 维的微积分基本定理。

（7）微积分与其他数学课程的关系：微分搭台，方程唱戏。

从微积分的角度来看其他数学课程，也许有利于了解微积分在整个大学数学课程中的地位，这里仅列举四门数学课程。

① 复变函数论是复数域上的微积分。从柯西算起，复变函数论已有 160 多年的历史。它以完美的理论与精湛的技巧成为数学的一个重要组成部分；它曾经推动过一些学科的发展，并且常常作为一个有力的工具被应用在实际问题中。

② 实变函数论是普通微积分的深化与拓展。在普通微积分学中，主要从连续性、可微性、黎曼可积性三个方面来讨论函数（包括函数序列的极限函数）。如果说普通微积分学所讨论的函数都是性质“良好”的函数（如往往假设函数连续或具有有限个间断点），那么实变函数论是从连续性、可微性、可积性三个方面讨论最一般的函数，包括从普通微积分学来看性质“不好”的函数。实变函数论不仅应用广泛，是某些数学分支的基本工具，而且它的观念和方法以及它在各个数学分支的应用，对构成近代数学的一般拓扑学和泛函分析两个重要的分支有着极为重要的影响。

③ 微分方程的研究与发展是以微积分为基础的。微分方程是常微分方程和偏微分方程（也称数学物理方程）的总称。含自变量、未知函数和它的微商（或偏微商）的方程称为常（或偏）微分方程。它几乎和微积分同时产生，并随实际需要而发展。微积分的产生，部分原因是当时研究天体运行规律的推动，而这些规律实际上只有用微分方程才能表达清楚。由于微分方程在天文、物理、力学、几何以及大量众多学科中大显神通，更充分显示了微积分的

① 龚昇．话说微积分．合肥：中国科学出版社，1998.

基础性与重要性。量子力学中的数学模型仍然是微分方程，詹姆斯·麦克斯韦（James Maxwell，1831—1879）方程为我们人类的文明社会唱出了千百首不朽的颂歌。英国科学家阿兰·图灵（Alan Turing，1912—1954）曾说："科学是微分方程，宗教是边界条件"。

④ 微分几何学是微积分在几何上的应用，或者说，是用微积分作为工具来研究几何。其主要研究欧氏空间中的曲线和曲面的几何性质，其核心思想就是可以单从导数所得到的局部信息，获得整个曲面的全盘面貌，可这样说，微积分诞生时，就诞生了微分几何。现代微分几何学所研究的对象是微分的流形，其上还配有附加的结构，具有复结构的微分流形特别是凯勒流形在多元复变函数和代数几何中起着重要的作用。数学大师陈省身（丘成桐的导师）曾说物理就是几何，如爱因斯坦的广义相对论方程的左端是几何量—曲率，右端是物理量—能量—应力张量。物理学家惠勒曾如此解释爱因斯坦的引力图象："物质告诉空间怎么弯曲，空间告诉物质怎么移动"。

（8）微积分的重要性：没有微积分，就没有现代化。

恩格斯说："数学是研究现实中数量关系和空间形式的科学。"英国哲学家培根曾说："数学是通向科学大门的钥匙。"美国哲学家亨利·戴维·梭罗（Henry David Thoreau，1817—1862）曾讲："有关真理最明晰、最美丽的陈述，最终必以数学形式展现。"引力的思想早已有之，但只有当牛顿用精确的数学公式表达时，才成为科学中最著名的万有引力定律。数学真正成为系统化的科学开始于欧几里得（Euclid of Alexandria，约公元前 330—公元前 275）的《几何原本》。数学史学家希斯（Thomas Heath，1861—1940）称《几何原本》为"史上最伟大的数学教科书"。女诗人圣文森米莱（Edna St. Vincent Millay）则写到："只有欧几里得看得见最纯粹的美。"欧几里得建立平面几何学的定理都只源于 5 个简单的公理或公式。从欧氏几何我们晓得，成熟而美丽的数学命题必定能够用简单的语言来叙述，这是一个审美很重要的概念，影响到两千年来我们对数学命题最简单审美的主要开辟点。这种思想方法不仅培养了数学家，也有助于提高全人民的科学文化素质，它是人类巨大的精神财富。

没有信息安全，就没有国家安全；没有信息化，就没有现代化。21 世纪是以网络为核心的信息时代，其重要特征是数字化、网络化和信息化。信息已成为社会发展的重要战略资源，社会的信息化已成为当今世界发展的潮流和核心，而信息安全在信息社会中扮演着极为重要的角色，它直接关系到国家安全、企业经营及人们的日常生活。信息安全是计算机、通信工程、数学等领域的交叉学科。

从数学结构来说，代数、分析、几何是数学的三要素，它们互相渗透、化合、生发出数学的绚烂篇章。在信息时代，概率论、数理统计及随机过程和离散数学（如初等数论、组合数学、有限域等）等，在计算机科学、通信工程、网络安全、代数编码等许多领域得到日益广泛的实际应用。例如，对素数的研究以往认为很少有实用价值，却不料它在密码学中受到重用。1995 年，英国数学家安德鲁·怀尔斯（Andrew John Wiles，1953— ）解决了一个 358 年前很出名的问题，叫做费马大定理。这个证明比定理本身重要得多，他利用模形式跟和圆曲线的理论来做费马定理的研究，这个证明的研究可以讲是动人心魄的。它的证明的伟大地方是使我们对椭圆曲线有了极深入的了解，而椭圆曲线在密码理论方面产生了很大的突破，如椭圆曲线是公钥密码体制的重要基础。

"高技术本质上是一种数学技术"，这种观点已为越来越多的人所接受。今天，一位不懂数学的经济学家绝不会成为杰出的经济学家。1969—1981 年间颁发的 13 个诺贝尔经济学奖中，

有 7 个获奖人是学数学的。“高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学。”这句话已把数学对高新技术和国富民强的作用，清楚地表达出来。当代科技的一个突出特点是定量化，精确定量思维是对当代科技人员共同的要求。所谓定量思维是指人们从实际中提炼数学问题，抽象化为数学模型，用数学计算求出此模型的解或近似解，然后回到现实中进行检验，必要时修改模型使之更切合实际，最后编制解题的软件包，以便得到更广泛的应用。应当强调的是，数学模型处于所有数学应用的心脏。

微积分乃是一种震撼心灵的智力奋斗的结晶。微积分从酝酿到萌芽，到建立、发展、完善，是凝结着两千多年来无数数学家的心血才谱写完成的，可以说是美的交响乐。熟悉这一学科的历史发展，了解人类的这有一巨大的积累过程和历史数学家的艰苦卓绝的奋斗精神，对于陶冶一个人的数学情操，提高自身的数学素养和思维能力，都具有十分重要意义。

科学之基础就是微积分，成功的微积分教学对学生成才是至关重要的。因为微积分使学生不仅仅能得到一颗颗珍珠，更能使他们得到一串串珍珠，而将这些珍珠串起来的基线，就是微积分。这门课程的主要矛盾是微分和积分。

（9）微积分之美：科技的进步就是人类对微积分之美追求的结晶。

作为人类文化一部分的数学，它不仅具有科学性，也具有艺术性。英国哲学家、数学家罗素（Russell，1892—1970）说：“数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且具有至高无上的美。”数学的美主要在于它的抽象性、简洁性、对称性和奇异性，数学的美还表现在内部的和谐和统一。最基本的数学美是简单美、和谐美、对称美和原创美，它应该且能够被我们理解和欣赏。怎么培养数学的美感呢？阅读大师们的著作和欣赏微积分之美是一个有效的途径。

微积分之美，集多年教学激情体验，探索微积分的数学艺术，培养莘莘学子对数学崇高的敬意，提升他们的创新创业能力，深入科技最新发展前沿，跟随用微积分改变我们看待宇宙方式的数学之旅。其主要特点有以下 3 个。

第一，培养学生的数学精神和审美情趣，树立“终身学习观念”；贯彻“讲思考、讲猜想、讲应用、讲来龙去脉”的原则，介绍微积分两千余年数学发展简史，鼓励学生为中华民族伟大复兴而发奋学习、成长成才。

第二，讲清“微分与积分”这一主要矛盾的对立与统一，进行辩证唯物主义教育；结合微积分在密码学、物理学、生物学、经济学等领域的应用，使学生较好地掌握数学模型和数学思想。

第三，使学生坚信数学中有美、美中有数学；使学生相信数学与诗一样，都充满了灵感、充满了智慧、充满了创造、充满了激情、充满了和谐、充满了挑战，更充满了人类的精神力量。

（10）赞数学美：数理美世界。

雅致统一奇异变①，空谷幽兰冰雪莲②。
神奇推理诗般意，数学艺术本相连③[①]。

［评注］① 数学美的基本内容是原创、简单、对称、和谐、雅致、统一、奇异、突变。

② 中国散文家诗人徐迟（Xu Chi，1914—1996）在报告文学《歌德巴赫猜想》中赞美数学定理、理论犹如空谷幽兰、冰山上的雪莲、老林中的人参等。

③ 数学是一门科学，也是一门艺术。控制论创始人、数学家诺伯特·维纳（Norbert Wiener，1894—1964）甚至说“数学是一门精美的艺术”。

① 郑隆炘．数学方法论与数学文化专题探析．武汉：华中科技大学出版社，2013．

数学与现实世界的关系，套用文艺界的术语，看来应该是源于生活、高于生活。2014 年 11 月 28 日，在北京电子科技学院举办的第四届“美理·艺数”数理文化节主题晚会上，演唱了原创歌曲《数理美世界》[词曲作者为张旭（20133208）；演唱者为成容（20133134）、赵凯铭（20143236）、周旭（20143235）、许佳雯（20143125）。]。

数理美世界

晚霞是夕阳的纱衣，梦想是岁月的奇迹。
数学为他增添阶梯，指引我们去追求成功。
青春因奋斗而美丽，汗水为其添光辉。
数学像那不眠的忍者，不断挑战大海的汹涌。
美理艺数，跃动的符，构成一个多彩的世界。
追求梦想，不断追寻，我们共同创造一个奇迹。
美理艺数，跃动的符，构成一个缤纷的世界。
前人未做，我们去完成，去创造，去宣扬，数理美世界。

目　　录

第 1 章　函数　极限　连续

数学的本质在于充分的思想自由。

——格奥尔格·康托尔（Georg Gantor，1845—1918）/德国数学家、集合论的创始者

数学就是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们的内心思想增添光辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。哪里有数，哪里就有美。

——普罗克洛斯（Proclus，410—415）/古希腊哲学家、柏拉图学院院长

§1.1　函数：微积分的研究对象

人们的精神财富与物质财富的对数成正比。

——丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli，1700—1782）/瑞士数学家、数学物理学的奠基人

内容提要

集合可以用来作为这个数学大厦的基础，这个事实是康托尔的伟大发现。宇宙中的一切物质都在运动、发展和变化，因此，数学中研究变量与变量之间的关系是十分自然的事情。作为数学概念的函数只表述变量之间的那种确定的依赖关系。将自然规律数量化的关键一步是函数概念的引进。伽利莱·伽利略的落体运动定律，艾萨克·牛顿的万有引力定律、阿尔伯特·爱因斯坦的质能转换公式等都是用函数概念表达的。函数概念的诞生标志着近代科学的开始。分析的化身、瑞士数学家莱昂纳德·欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）于 1734 年首创了 $f(x)$ 作为函数的记号（用 i 表示 $\sqrt{-1}$、用 Σ 表示求和，等等），这种用法一直保持到今天，这是函数概念从解析表达式走向抽象表示的第一步。函数的概念就是下列谜语的谜底。

数集 A、B 两非空，对应法则驾彩虹。

A 中都是痴情数，嫁入 B 中唯一从。

我为美而死

作者：[美]艾米莉·狄金森（Emily Dickinson，1830—1886）

我为美而死——
当我刚适应坟墓时
就有人躺进了邻室——
他为真而死——
他和蔼地问，我为何而死？

我答道："为了美。"——
他说："我们是兄弟。"——
于是像亲戚，一夜相遇——
我们隔壁低语
直到青苔爬上了我们的嘴唇
盖住了——我们的名字——

1.1.1 悬链线

[例 1-1-1] 两手抓住一根均匀链子的两端，让其自然下垂，问它是何种曲线？

答案：悬链线。

[评注 1] 连接 A、B 两点的曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转，侧面积最小者必为悬链线 $y=a\mathrm{ch}\frac{x}{a}(a\neq 0)$，即悬链面是仅有的极小旋转曲面。

[评注 2] 1690 年，瑞士数学家雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli，1654—1705）提出悬链线问题，如图 1.1.1 所示。德国数学家莱布尼茨、荷兰天文学家克里斯蒂安·惠更斯（Christiaan Huygens，1629—1695）、约翰·伯努利（Johannes Bernoulli，1667—1748）及雅各布·伯努利于 1691 年分别独立地给出了问题的解，该曲线满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{s}{a}$$

其中，a 为常数，$s=$ 弧长 OP（图 1.1.1）[①]。他们导出此方程的办法是对链上 OP 部分做了代换。注意到 P 点切线方向的力是 F_1，水平方向的力是 F_0 —— 它与 P 点无关时链处于平衡状态；此时用质量等于 OP 的一点 W 来代换 OP 弧（因此它与 s 成比例），可达到同样的力的平衡。比较这些力的方向和大小，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{W}{F_0}=\frac{s}{a}$$

利用 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$

可将微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{s}{a}$ 变换为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{a}{\sqrt{1+z^2}}$，其中 $z=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

通过上述精巧的变换，伯努利将上述方程约化为方程[②]

$$\mathrm{d}x=\frac{a\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-a^2}}\Rightarrow y=a\mathrm{ch}\frac{x}{a}\quad(a\neq 0)$$

① 陈鼎兴．数学思维与方法：研究式教学．南京：东南大学出版社，2008.

② John Stillwell．数学及其历史．袁向东，冯绪宁译．北京：高等教育出版社，2011.

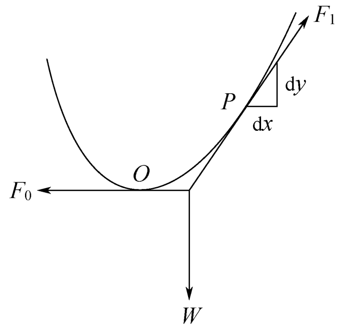


图 1.1.1　悬链线

虽然今天它只是微积分学或力学中的一道练习题，但在雅各布 · 伯努利把所有这些都做出来的时候，它却是新颖而困难的（见例 5-2-17）。

[评注 3] 双曲正弦函数 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$ 的反函数是 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$。函数存在反函数时可用于密码学中的加密变换和解密变换。

[评注 4] 德国数学家兰伯特（Lambert，1728—1777）于 1770 年首次系统地研究了双曲函数，并发现：$v=\mathrm{sh}x$ 与 $u=\mathrm{ch}x$ 是等轴双曲线 $u^2-v^2=1$ 上一点的坐标。

1.1.2　函数概念及其演变

1769 年，法国数学家达朗贝尔（Jean le Rond d'Alembert，1717—1783）首次导出了函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

法国数学家奥古斯坦 · 路易 · 柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789—1857）在 1821 年导入了更多的函数方程：$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$。

18 世纪上半叶的数学家都相信：一个函数处处有相同的表达式。但 1822 年，法国数学家、“诗人”约瑟夫 · 傅里叶（Joseph Fourier，1768—1830）在其经典文献《热的解析理论》（该书是一首伟大的数学诗，记载着傅里叶级数与傅里叶积分的诞生经过的重要历史文献）中用三角级数和的形式表示间断函数。例如，函数 $y=f(x)=\dfrac{\sin x}{1}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\cdots$ 收敛到函数

$$y=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & 2n\pi<x<(2n+1)\pi\\ 0, & x=n\pi\\ -\dfrac{\pi}{4}, & (2n-1)\pi<x<2n\pi\end{cases}$$

在区间 $0<x<\pi$ 内的所有 x 的值，$\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 的值是相等的，但不能说 $\varphi(x)\equiv f(x)$。

[例 1-1-2] 德国数学家狄利克雷（Dirichlet，1805—1859）于 1829 年定义了一个函数：它把实数中的每一个有理数对应于 1，而把每一个无理数对应于 0，这便是著名的狄利克雷函数。这个函数具有四个特点：没有公式；没有图形；不连续；没有实际背景。

[评注 1] 任何正有理数都是该函数的周期，周期函数不一定有最小正周期。

[评注 2] 意大利数学家朱塞佩 · 皮亚诺（Peano，1858—1932）证明了，狄利克雷函数（处处不连续）可用下面的表达式解析地表示：

$$D\left(x\right)=\lim_{m\to\infty}[\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^n]。$$

[评注 3] 1837 年，狄利克雷提出了函数的定义，这个定义至今还在使用，他的定义如下：函数是一种定义关系，对于每一个自变量 x，对应一个且只有一个因变量 y，而不管这个对应是如何定义的。

[评注 4] 从微积分诞生到 19 世纪初，整个分析的基础就是连续函数和函数导数的概念，在近 200 年的时间内没有函数的精确概念。历史上第一个给出函数一般定义的是狄利克雷，这是微积分严格性的开始。

直到集合论诞生后，才出现现在的函数定义。函数的定义作为两个任意集合（未必是数集）的对应关系是由德国数学家理查德 · 戴德金（Richard Dedekind，1831—1916）于 1887 年给出的。

连续函数与可积函数不是一件事情，它们之间存在着一条鸿沟。例如，黎曼函数：当 x（$x=\dfrac{p}{q}$，最简分数）是有理数时候，$f(x)=\dfrac{1}{q}$（黎曼函数是不连续的）；当 x 是 0 或无理数时，$f(x)=0$（黎曼函数是连续的），但黎曼函数是可积的。

连续函数和可微函数之间也出现一条鸿沟。例如，1874 年德国数学家魏尔斯特拉斯构造了一个没有导数的连续函数。

三个重要函数（狄利克雷函数、黎曼函数、魏尔斯特拉斯函数）向人们暗示，微积分最基础的东西是实数。于是魏尔斯特拉斯提出了一个规划：首先逻辑地构造实数系；继而从实数系出发去定义函数概念、极限概念、函数的连续性、可微性、可积性和级数的收敛和发散。这个规划称为分析的算术化。任务繁重而困难，但在接近 19 世纪末的时候这个规划最终完成了，魏尔斯特拉斯规划的成功在数学基础方面产生了深远的影响。

1.1.3　函数的图象

点集 $C=\{(x,y)\,|\,x\in D,y\in f(x)\}$ 称为函数的图象。

[评注 1] 无限的拓荒者、集合论的奠基人康托尔正是从考虑超越数的存在，开始研究集合论的。1874 年，他给集合下了这样一个定义：把若干确定的有区别的（无论是具体的或抽象的）事物合并起来，看做一个整体，就称为一个集合（简称集），其中各事物称为该集合的元素（或成员）。集合可以用来作为整个数学大厦的基础，这个事实是康托尔的伟大发现。

一一对应，别开生面。1872 年戴德金定义：如果一个集合包含一个与它的元素一一对应的元素所组成的子集，那么这个集合就是无穷的。1873 年康托尔写信给戴德金说，他已经成功地证明了实数集能与 0～1 之间的数建立一一对应（如 $f(x)=\tan\left(\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right):\left(0,1\right)\to\left(-\infty,+\infty\right)$），但实数集不能与自然数集一一对应。它是“不可数的无穷”，康托尔给这种集合取名为“连续统”，用符号 c 表示。这一刻，集合论诞生了。而像自然数集这样“可数的无穷”，他用了希伯来字母表的第一个字母阿列夫（aleph）和下标 0 表示。自然数集可以包含一个与它的元素一一对应的子集，因此整个集合与它的部分相等。当然，这与人们 2000 多年来信奉的欧几里得的公理“整体大于部分”是相悖的。“一一对应”是开启天堂之门的金钥匙，也是管理混乱无序的无限世界的铁律，荷兰著名数学家、数学教育家弗赖登塔尔（Freudenthal，190—1990）曾经如此说过。数学是依靠“就这样继续下去”与“一一对应”两大思想发展起来的。实际上，任何人都是依靠“就这样继续下去”的信念才能活下去的，再依靠“一一对应”使自己活得更充实。

[评注 2] 一幅图胜过千言万语，函数的简单作图法主要有以下几种：

（1）迭加，如 $y=x+\dfrac{1}{x}$。

（2）放大或缩小，如 $y=2\sin x$。

（3）平移，如 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-3$。

（4）翻转，如 $y=|\sin x|$。

（5）相乘，如 $y=\mathrm{e}^x\sin x$。

（6）旋转，如可将笛卡儿叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$ 绕坐标原点顺时针旋转 45°。

1.1.4　黎曼猜想

[例 1-1-3] 素数函数 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$，被定义为到 x 为止的素数的个数，例如，$\pi(2)=1$；$\pi(3)=2$；$\pi(100)=25$；$\pi(1000)=168$；$\pi(10^8)=5761455$。1859 年 8 月，没有什么名气的 32 岁数学家黎曼向柏林科学院提交了一篇论文，题为“论小于一个给定值的素数的个数”，在这篇论文的中间部分，黎曼做了一个附带的备注——一个猜测，一个假设。时至今日，在经历了 156 年的认真研究和极力探索之后，这个猜想仍然悬而未决。

[评注 1] 18 世纪末，法国数学家勒让德（Legendre，1752—1833）和高斯（Gauss，1777—1855）各自猜测：

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}\ (x\to+\infty)\text{，即}\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1$$

这个论断称为素数定理。素数定理是整数中最受关注的课题，从很多角度说，这一定理的证明及相关领域的研究都在哲学意义上的层面上揭示了一个复杂系统整体意义上的规律性和局部意义意义上的随机性。Dirichlet 定理（任何正整数无限等差数列，如果首项与公差互素，那么该数列中存在无限多个素数）令人信服地揭示了素数分布在整体意义上的均匀性。它告诉我们只要满足很微弱的必要条件，那么素数等同分布在整数序列的每个密度均匀的子序列中。1896 年，法国的数学家阿达玛（Hadamard，1865—1963）和比利时的瓦莱 · 普桑（Poussin，1866—1962）用复变函数的方法独立证明了上述**素数定理**（the Prime Number Theorem，PNT）。1949 年，在挪威出生的美国数学家赛尔伯格（Selberg, 1917—2007）和匈牙利数学家保罗 · 厄多斯（Paul Erdös, 1913—1996）又各自用初等方法证明了素数定理。次年，赛尔伯格获得了菲尔兹奖。

[评注 2] $\pi(x)\sim\mathrm{Li}(x)$ （$x\to+\infty$）（PNT 的改进版）积分对数函数 $\mathrm{Li}(x)$，它被定义为 $1/\ln t$ 的图象下方从 0 到 x 之间的面积，即

$\mathrm{Li}(x)=\int_2^x\dfrac{\mathrm{d}u}{\ln u}+c_0$，其中 $c_0=\lim\limits_{\delta\to0}\left(\int_0^{1-\delta}\dfrac{\mathrm{d}u}{\ln u}+\int_{1+\delta}^2\dfrac{\mathrm{d}u}{\ln u}\right)$，$\mathrm{Li}(1.4513692348828\cdots)=0$。$\mathrm{Li}(x)$ 的斜率在任一点处都是 $1/\ln x$，这就是在 x 附近的一个整数是素数的概率。

[评注 3] 公式 $\pi(x)=\mathrm{Li}(x)+O\left(\sqrt{x}\log x\right)$ 是黎曼猜想（1859 年）的算术等价形式。

2000 年 5 月 24 日，美国 Clay 数学研究院（Clay Mathematics Institute）公布的新千年七大数学难题中第一问题就是黎曼猜想。（见例 3-2-11）

[例 1-1-4] 取整函数 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，一般的，$[x]\le x<[x]+1$；

可以证明（拉格朗日定理）：$n!=\prod_{p\le n}p^{\alpha(p,n)}$，这里的连乘号表示对所有不超过正整数$n$的素数求积，$\alpha(p,n)=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^j}\right]$，例如，$20!=2^{18}\cdot3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19$。

[评注 1] 取整函数是由德国数学家高斯在 1800 年研究椭圆内整点问题时引进的函数。大家知道，实数系是通过自然数系的逐步扩张获得的，实数取整又让实数回归到整数，这让我们找到了返璞归真的感觉。取整函数的文化解读就是“抓住本质，舍去次要”。$y=[x]$的图象解读可用唐朝诗人王之涣（Wang Zhihuan，688—742）的美丽诗句“欲穷千里目，更上一层楼”、“大鹏一日同风起，扶摇直上九万里”来形容。

[评注 2] $n!$的解析表达式是$n!=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$。詹姆斯·斯特林（James Stirling，1692—1770）公式：$m!=\sqrt{2\pi m}m^m\mathrm{e}^{-m}\mathrm{e}^{\theta_m}\left(0<\theta_m<\frac{1}{12m}\right)$，其$n$阶置换可用于语音的加解密。法国数学家亚伯拉罕·棣莫弗（Abraham de Moivre，1667—1754）于 1733 年用$n!$的近似公式导出正态分布的频率曲线，作为二项分布的近似。

[评注 3] 21 世纪的数学难题：$3x+1$问题。1937 年，德国数学家柯拉兹（Collatz，1910—1990）考虑了下列数论函数：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},\ 若x是偶数\\ \dfrac{3x+1}{2},\ 若x是奇数\end{cases}$$

他猜想，经过有限次迭代运算后，$f(x)$均归于 1。

1.1.5 问题探究：函数之美

[例 1-1-5]算术平均值与几何平均值有什么几何意义？求解方程：$\mathrm{e}^{\frac{x}{G}}=\left(\frac{x}{G}\right)x,\ G>0$。

解：算数平均值与几何平均值的几何意义如图 1.1.2 所示。

[评注 1]如图 1.1.3 所示，令$G=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，则$\mathrm{e}^{\frac{a_1}{G}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{a_2}{G}}\cdots\mathrm{e}^{\frac{a_n}{G}}\ge\left(\frac{\mathrm{e}a_1}{G}\right)\left(\frac{\mathrm{e}a_2}{G}\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{e}a_n}{G}\right)$。

注意到：$G^n=\prod_{i=1}^{n}a_i$，$\therefore\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge$G。

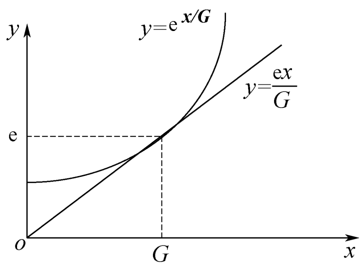


图 1.1.2 算术平均值与几何平均值的几何意义

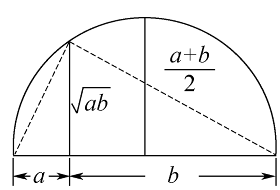


图 1.1.3 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$示意图

[评注 2]匈牙利数学家保罗·厄多斯给出了巧妙证明，他观察到对于任何$x\ge-1$，都有

$e^x \geq 1+x$，令 $G_n=\left(a_1a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}$，$A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，以 $x_r=\dfrac{a_r}{A_n}-1$ 一一代入上述不等式，然后把 n 个不等式乘起来，可以得到

$$1=\prod_{r=1}^{n}e^{\frac{a_r}{A_n}-1}\geq\prod_{r=1}^{n}\frac{a_r}{A_n}=\left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n$$

推论 1：$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leq\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$。

推论 2：$n!\leq\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$。

[例 1-1-6] 证明数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调有界。

[提示]利用几何平均与算术平均的关系证明 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的单调性：

$$x_n=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq\left[\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1}=x_{n+1}$$

用二项式定理证明其有界性：$x_n<3$。利用 $\dfrac{1}{n!}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$，得

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\frac{1}{n!}<1+\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=1+2\left(1-\frac{1}{2}\right)<3$$

[例 1-1-7] $f(x)=xe^{-|\sin x|}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 为（　　）。

（1）有界函数（2）单调函数（3）周期函数（4）奇函数

答案：(4)。

分析 非有界，反正法：如果 $f(x)$ 有界，则 $|x|=|f(x)|e^{|\sin x|}\leq Me$，矛盾。

非单调：因为 $f(0)=0$，$f(\pi)=\pi$，$f(\dfrac{3\pi}{2})=\dfrac{3\pi}{2e}$，但 $f(0)<f(\pi)$，而 $f(\pi)>f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$。

[评注 1] 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数关于原点不对称，则该函数就不是奇函数或偶函数。

[评注 2] 定义在（-1，+1）上的任意函数 $f(x)$ 均可表示为一个奇函数与一个偶函数之和：$f(x)=\dfrac{[f(x)+f(-x)]}{2}+\dfrac{[f(x)+f(-x)]}{2}$。

[评注 3] $f(x)+f(-x)=0$ 是判断奇函的有效方法。

[例 1-1-8] 任何周期函数，必有最小正周期，对吗？

[反例] 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\0, & x\text{是无理数}\end{cases}=\lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(\cos m!\pi x)^n]$$

则任何正有理数都是该函数的周期，因为不存在最小的有理数，所以它没有最小正周期。

[例 1–1–9] 求复合函数表达式的代入法。

设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}$。

解：用归纳法 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$。

[评注] 在微积分中复合函数是一个重要概念。代入法就是将一个函数的自变量用另一个函数的表达式替代，适用于初等函数。

[例 1–1–10] 求复合函数表达式的分析法。

设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$，$g(x+1)=x^2+x+1$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$。

解 由 $g(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+1$，得

$$g(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0。$$

设 $f[g(x)]=g(x)$，$g[f(x)]=f^2(x)-f(x)+1=\begin{cases}1, & x<0\\ x^2-x+1, & x\geq 0\end{cases}$。

[评注 1] 所谓分析法就是抓住最外层函数的定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数方法，适用于分段函数。

[评注 2] 函数概念的两个要素：定义域和对应法则，函数的表示法只与函数规则有关，而与用什么字母表示无关，即

$$f(x)=f(t)=f(u)$$

简称函数表示法的“无关特性”，这是由 $f[g(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法。

[例 1-1-11] 复合函数 $f\circ g=f[g(x)]$ 的定义域即为 $g(x)$ 的值域，对吗？

[反例] $f(u)=\sqrt{\dfrac{1}{2}-u}$，$u=\sin x$，$\sin x$ 的值域是 $[-1,\ 1]$，而 $f(u)$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi,\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\right]$，$n\in\mathbf{Z}$。

[评注] 函数的复合是有条件的，并不是任何两个函数都能复合成一个复合函数，只有复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域 $D_{f\circ g}$ 与函数 $g(x)$ 的值域 Z_g 满足：$D_{f\circ g}\cap Z_g\neq\phi$（空集）。适当限制 x 的取值范围，f 与 g 才能构成复合函数。

[例 1-1-12] 设 a 和 b 互质，则 $\left[\dfrac{a}{b}\right]+\left[\dfrac{2a}{b}\right]+\cdots\left[\dfrac{(b-1)a}{b}\right]=?$

解：由图 1.1.4 得出答案为 $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$。

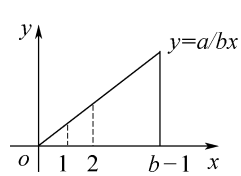


图 1.1.4 三角形中格点的总数

[例 1-1-13] 如何计算星期几？

[提示]如果将日期写成 D =第“ N ”年“ m ”月“ d ”日，则星期数 W_D 可由下式给出：

$$W_D \equiv d+\left[\frac{(13m-1)}{5}\right]+y+\left[\frac{y}{4}\right]+\left[\frac{c}{4}\right]-2c \pmod 7$$

这里 c，y 由下式确定：

$$N=100\cdot c+y，0\leq y < 100$$

[评注 1]星期日=0，星期一=1，星期二=2，星期三=3，星期四=4，星期五=5，星期六=6。

[评注 2]由于闰年增加的一天定在 2 月 29 日，所以我们把 3 月算做这一年的第一个月，4 月算做这一年的第二个月，…，12 月算做第十个月，下年的 1 月算做这一年的第十一个月，下年的 2 月算做这一年的第十二个月。例如，2000 年 1 月 1 日是星期几？此时按规定：D =第“ 1999 ”年“ 11 ”月 1 日，所以 $c=19$，$y=99$，$m=11$，$d=1$，由公式 W_D 可得

$$W_D \equiv 1+\left[\frac{142}{5}\right]+99+\left[\frac{99}{4}\right]+\left[\frac{19}{4}\right]-38\equiv 6 \pmod 7$$

因此，这天是星期六。

[评注 3] 公式 W_D 的证明途径是这样的[①]：先给出 N 年 3 月 1 日，即“ N ”年“ 1 ”月“ 1 ”日的星期数 W_N^0；然后求出“ N ”年“ m ”月“ 1 ”日的星期数 $W_{N,m}^0$；最后求出“ N ”年“ m ”月“ d ”日的星期数 W_D。这里 $W_N^0\equiv 3-2c+y+\left[\frac{y}{4}\right]+\left[\frac{c}{4}\right]-2c \pmod 7$，$W_{N,m}^0\equiv W_N^0+\left[\frac{(13m-11)}{5}\right] \pmod 7$，$W_{N,m}^0\equiv W_N^0+\left[\frac{(13m-11)}{5}\right] \pmod 7$，$W_D\equiv W_{N,m}^0+(d-1) \pmod 7$。

[评注 4] 公式 W_D 实用于 1582 年 10 月 15 日（格里哥利历）以后的日期是星期几。

1582 年，在罗马教皇格里哥利十三世（Gregory ⅩⅢ，1502—1585）主持下，完成了对基督教世界沿用了一千多年的儒略历的改历工作，颁行了格里哥利历。它与儒略历的主要不同有两点：一是去掉了 10 天，将公元 1582 年 10 月 5 日直接变成 15 日；二是逢百之年只有能被 400 整除的年份才算闰年。我国从 1912 年开始采用格里哥利历，但同时保留我国自己的阴阳合历，即农历。

1.1.6　e 是所有数的老师[②]

英国数学家约翰 · 纳皮尔（John Napier，1550—1617）考察基于乘除法的几何级数与基于加减法的算术级数之间的对应关系于 1614 年发明了对数（Logarithm，这个名称源自两个古希腊语单词，Logos（理性，或比例、比）和 Arithmos（数）），早于微积分的建立，但是无理数 e 的发现肯定与微积分计算直接相关。因此，可以断定 1614 年纳皮尔发明的是以 10 为底的常用对数（log：数与数之间总保持相同的比列），自然对数则出现在微积分之后。

历史上纳皮尔曾用积分来定义对数函数，例如，双曲线 $xy=1$ 与 x 轴之间在区间 $[1，b]$ 所围的面积（在区间 $[1，b]$ 中插入 $n-1$ 个分点 x_1，x_2，…，使得 x_0，x_1，x_2，…，x_{n-1}，x_n 成等比数列：$x_0=1$，$x_n=b$，其公比为 $q=\frac{x_k}{x_{k-1}}(1\leq k\leq n)$（具体参见§5.1），得出了

① 潘承洞，潘承彪．初等数论．3 版．北京：北京大学出版社，2013.

② 张广祥．数学思想十讲．北京：科学出版社，2013.

对数函数的定义：

$$\ln b=\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

由于$\int_1^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_1^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{x_1}^{x_1\cdot x_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{x_1x_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$，即可得乘积的对数变成对数之和。

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=(\ln x)'\big|_{x=1}=1$，以 e 为底取指数$\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}$，于是得到无理数 e 的定义：$\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=2.71828182\cdots$

1914 年，第一次世界大战的阴云笼罩着英伦三岛，对数发明 300 周年的庆典依然在纳皮尔的故乡爱丁堡举行。领主莫尔顿挥动着手臂，发表了盛情并茂的演说：“对数的发明如黑夜中一道闪电划破长空，没有任何预兆。它未曾借助其他已知的智慧结晶，也未沿袭现存的数学理念，那么突然、孤立而又出人意料地出现了。[①]”意大利著名物理学家、天文学家伽利略甚至声称：“给我空间、时间和对数，我们可以创造一个宇宙。”这话说到无以复加的程度，可见纳皮尔发明的对数影响有多大。

e 的亲密有理数：$\mathrm{e}\approx 2\dfrac{232}{323}=2.7182662\cdots$。最美公式$\mathrm{e}^{i\pi}+1=0$见例 3-2-13。

e 与自然数列的亲密关系：$\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)}{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}}$，就是说 e 是前$n$正整数的算术平均值与几何平均值之比的极限。

e 和 π 是两兄弟。π 是两个长度之比（圆的周长与直径），而 e 是双曲线$xy=1$、与横坐标轴之第一个单位区间所夹区域的面积。π 较多地与初等函数有关，而 e 较多地与微积分有关。

e 是时间的见证。现在，越来越多的人都知道：考古界确定古生物（包括植物和动物）历经年代的最有力工具是精确测定生物体某种特定元素的含量，因为这些元素的含量随时间的变化会以指数规律衰减，即$N(t)=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$式中，$N_0$是$t=0$（即生物体刚死亡）时的含量；而$N$代表$t$时刻的含量；特别重要的是衰减快慢由参数$\lambda$来决定，而$\lambda$只与特定的物质有关，与温度、环境等因素均不相关，所以我们只需已知N_0和测量到的N，根据特定的物质参数λ，即可确定古生物的存在时间t，而$t=\dfrac{1}{\lambda}\ln\left(\dfrac{N_0}{N}\right)$。

e 是自然律的精髓，其形象代言人是对数螺线$\rho=\mathrm{e}^{a\theta}$：“纵使变化，依然故我”。微观的放射性原子的衰变率及辐射总量，宏观的人口增长的基本规律，物理学声波在空中传播的强度测定，金融帐户的复利计算，细胞繁殖的具体描绘，宇宙大爆炸的理论阐述，这些自然界和社会中的大量事物，看起来毫无关联，但因为它们有生有灭、有降有升，在依存中对抗，在对抗中妥协，在妥协中共生，联系着内在也联系着外在，联系着过去也联系着未来，虽然有各自不同的情况，有各自不同的表达式，但 e 是它们共同的基座。

随机性和 e 的奇妙联系。概率论表明，当许多随机触发的事件分布在有限时空间隔中时，就可以料到 e 会出来。例如，平均选出多少个正小数相加才能使和大于 1？答案是 e。再如，大约一个世纪前，统计学家拉迪斯劳斯 · 博尔特基维茨（Ladislaus Bortkiewicz）对普鲁士军队

① 张宏时．数学如诗．苏州：苏州大学出版社，2015.

中的死亡情况所进行的经典研究，发现 e 潜伏在如因遭马踢而死亡的风险那样的随机事件中。根据多篇研究报告，普鲁士士兵都面临着虽然小但并非完全不可能的因遭马踢而死亡的风险，数量为平均 1.64 年死亡一例。博尔特基维茨发现，在 200 篇报告中，有 109 篇根本没有死亡记录。现在，用 200 除以 109，把得到的商取 1.64（因遭马踢而死亡的平均间隔年数）次幂，结果为 2.71，误差在 e 的真值得 1%范围内。

设定一个整数 n，然后不按顺序随机写下 1～n，那么没有配对的概率就是

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

其极限就是 $\frac{1}{\mathrm{e}}\approx 0.37$，37 是一个神秘数字，如在前 37%产品中选择最优惠的产品（但不购买），再接下来的产品中有比这个产品更优惠的就买下来。那么此时赢的概率是 37%。这个策略是最优策略；其他策略再复杂也不可能使赢的概率更高。

e 究竟是谁发现的？有的说是欧拉，e 取自欧拉（Eluer）的第一个字母，以纪念他做出的杰出贡献。这当然是一种“合情”的推测；有的说，e 作为自然对数的底，可能取自“指数”（Exponent）的第一个字母。这也是一种合理的推断。e 只是其名，表达式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 才是其实（设年初本金为 1 元、年利率为 100%、一年内计算复利共 n 次，则年终的本金变为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$）。18 世纪，欧拉首次用字母 e 表示自然对数的底，一直沿用至今。

e 与“易”有异曲同工之妙。e 是自然律的主角，“易”含三义：简易、变易、不易。自然指数函数的导数即它自身，竟与“以不变应万变”这一中国古老禅宗《周易》的经典思想暗暗相符。

一个没有几分诗人才气的数学家永远不会成为一个完美的数学家。

——[德]卡尔·魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1818—1897）/现代分析学之父

数学的无穷无尽的诱人之处在于，它里面最棘手的悖论也能盛开出美丽的理论之花。

——戴维（Humphry Davy，1778—1829）/英国物理学家、化学家

§1.2　数列的极限：微积分的奠基石

内容提要：

极限（Limit）是微积分学的基本概念之一，用于描述变量在某一变化过程中的变化趋势。体现“人类精神的最高胜利”的微积分奠基在极限这块基石上。随着微积分学的产生，极限概念被明确提出，但含糊不清，直至 19 世纪，才由柯西、魏尔斯特拉斯等人的工作，以及实数理论的建立，才使极限理论有了严密的理论基础之上。

极限语言近于诗。有如美国著名音乐家约翰尼·默瑟（Johnny Mercer，1910—1976）的诗句“强调的是肯定，去掉的是否定。你筑起篱笆围上了确定。”与用“$\varepsilon-N$ 语言”描述的数列极限的定义“$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$”的文学意境是相同的。

数列是一种特殊的函数，数列极限与函数极限有以下关系：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，当且仅当每一个以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 时，有 $f(x_n)\to A(x_n\neq x_0)$。这可以将函数的极限问题转化为数列极

限问题来考虑。在某些情况下，这种方法是很有用的。

每天进步一点一点就是完美：

$(1-0.02)^{365}$ =0.0006 ；

$(1-0.01)^{365}$ =0.0255 ；

1^{365}=1 ；

$(1+0.01)^{365}$ =37.783 ；

$(1+0.02)^{365}$ =1377.4 ；

……

1.2.1 曲边梯形的面积

[例 1-2-1]求抛物线 $y=x^2$、x 轴、直线 $x=1$ 所围成的曲边三角形的面积 S，如图 1.2.1 所示。

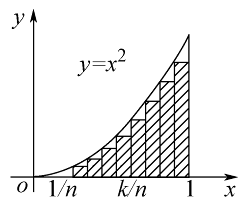


图 1.2.1 $y=x^2$ 示意图

[提示] $S\approx x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^2\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\to\dfrac{1}{3}$。

[评注 1] 数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界。

[评注 2] 该曲边三角形绕 x 轴旋转一周的体积：(见 5.2.8)

$$V\approx y_n=\sum_{i=1}^{n}\pi\left(\frac{i}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}=\frac{\pi}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{\pi}{30}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\to\frac{\pi}{5}。$$

[评注 3] 1638 年，业余爱好者中的数学王子费马注意到以下公式：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1}=\frac{n(n+1)}{2\times1}，\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2\times1}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3\times2\times1}$$

费马（Pierre de Fermat，1601—1665）用类比方法得到：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2)}{3\times2\times1}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4\times3\times2\times1}，\quad \sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

1.2.2 割圆人间细，方盖宇宙精

公元 3 世纪北魏的刘徽（Liu Hui，225—295）提出的“割圆术”，就是现代微积分的极限思想，即用圆内接正多边形的面积来逼近圆面积。具体来讲，刘徽的“割圆术”把极限的动态变化过程及其归宿描述得十分透彻和传神：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与园周合体而无所失矣”，他用圆内接 192 边形的周长与直径之比作为“π”的近似值，得到了π≈3.14 的世界首创的近似值；用圆内接 24576 边形的周长与直径之比，对 9 位数做 12 次加减乘除乃至开方的大容量计算，方能得出 3.1415926<π<3.1415927。刘徽的思想经 5 世纪南北朝的祖冲之（Zu Chongzhi，429—500）及其儿子祖暅发扬光大，证明了圆周率介于 3.1415926

与 3.1415927 之间（祖率 355/113，疏率 22/7），祖冲之是世界上第一个把π的准确值计算到小数点后七位的人，而欧洲的奥托（RALENTINUS Otto，约 1550—1605）于 1573 年才算出此结果，在π的近似的国际竞赛中领先了近千年之久。祖冲之祖籍河北涞源县，熏陶于既重视科学技术与工程技术，又有深厚的文化修养的家庭环境之中，形成了崇尚科学技术又儒雅细致的思想品格。可惜的是，《缀术》六卷在 11 世纪早已失传。祖冲之在当时的计算工具非常简陋（还没有算盘）的情况下，用何种方法达到世人所未达到的精度？其推测有三种方法。

推测一："调日法"[李俨（Li Yan，1892—1963），钱宝琮（Qian Baocong，1892—1974）中国数学史家]，$\dfrac{a}{b}<\dfrac{(a+c)}{(b+d)}<\dfrac{c}{d}$，取$\dfrac{a}{b}=3.14=\dfrac{157}{50}$（后人称之为"徽率"），$\dfrac{c}{d}=3.14286=\dfrac{22}{7}$，用上式 9 次，得$\dfrac{(157+22\times 9)}{(50+7\times 9)}=\dfrac{355}{113}$（祖率）。

推测二："连分数"法[华罗庚（Hua Luogeng，1910—1985），中国数学家]。

$3.14=\dfrac{157}{50}=3+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}$，$3.1416=\dfrac{3927}{1250}=3+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{11}$，$\dfrac{355}{113}=3+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{16}$。

推测三："外推法"。单位圆的内接正n边形的面积$S_n=n\times\frac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S=\pi$。同时可以证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 4x}=\dfrac{1}{4}$，这样就可以得到$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{4n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=\dfrac{1}{4}$。

$$\begin{aligned}S-S_{2n}&=\left(S_{4n}-S_{2n}\right)+\left(S_{8n}-S_{4n}\right)+\left(S_{16n}-S_{8n}\right)+\cdots\\&\approx\left(S_{4n}-S_{2n}\right)+\frac{1}{4}\left(S_{4n}-S_{2n}\right)+\frac{1}{4^2}\left(S_{4n}-S_{2n}\right)+\cdots\\&=\frac{4}{3}\left(S_{4n}-S_{2n}\right)\approx\frac{1}{3}\left(S_{2n}-S_n\right)\end{aligned}$$

这样就得到π的近似公式

$$\pi\approx S_{2n}+\frac{1}{3}\left(S_{2n}-S_n\right)$$

[评注 1] π越精确，文明程度也越高。德国数学史家康托尔记述了从远古到 1799 年全部数学史的《数学史讲义》一书中就指出："历史上一个国家所算得的圆周率的准确程度，可以作为衡量这个国家当时数学发展的水平的指标。"刘徽和祖冲之在圆周率方面的成就是中国古代数学最辉煌的篇章之一。1767 年，德国数学家兰伯特严格证明π是无理数；1882 年，德国数学家林德曼（Lindemann，1852—1939）从$1+e^{i\pi}=0$出发证明π是超越数，即π不是有理系数多项式的根，从而为解决"化圆为方"问题提供了关键步骤，其中法国数学家夏尔·埃尔米特（Charles Hermite，1822—1901）在 1873 年证明了 e 的超越性。1706 年伦敦天文学家梅钦（Machin，1686—1771）提出公式$\pi=16\arctan\dfrac{1}{5}-4\arctan\dfrac{1}{239}$，并用幂级数展开的手段，突破了π的百位小数大关；英国人向克斯（W.Shanks，1812—1882）花了 15 年时间用梅钦公式计算出π的 707 位（1853），这项记录一直保持到 1945 年，这一年弗格森（D. F. Ferguson）发现向克斯的结果在 527 位之后是错误的。他用当时的台式计算机在 1947 年将π的近似值计算到 808 位，所用的公式是$\dfrac{\pi}{4}=3\arctan\dfrac{1}{4}+\arctan\dfrac{1}{20}+\arctan\dfrac{1}{1985}$；2006 年，一位日本退休工程师原口证（Akira Haraguchi）创下世界记录，一口气背诵出π小数点后的 10 万位数字；2011 年 10

月 16 日，日本的工程师近藤茂利在家中组装电脑计算 π 到了十万亿（10^{13}）位，等等。英国格拉斯哥大学（Glasgow）的权威经典物理学家开尔文爵士（Lord Kelvin，1824—1907）曾说："数学家觉得 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ （见例 5-2-13）是很显然的，就像外行人看待 $2 \times 2 = 4$ 那样。"

[评注 2] 月球背面有 4 座环形山以中国古代科学家命名，分别是战国魏国天文学石申（约公元前 4 世纪），中国东汉科学家、文学家、思想家张衡（Zhang Heng，78—139），元代的天文学家、数学家、水利专家和仪器制造家郭守敬（Guo Shoujing，1231—1316）和祖冲之。

[评注 3] 用微积分基本定理（见§5.2）可以证明：$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$（第 29 届普特南数学竞赛试题，1968 年 12 月 7 日）。

$$\because \ x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4 = (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)(x^2+1) - 4$$

$$\therefore \ \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{4}{6}x^5 + x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x - 4\arctan x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{22}{7} - \pi$$

1.2.3 极限的定性和定量描述

1. 定性描述

给定数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时，x_n 有确定的变化趋势——与某一实数 a 无限接近，则说数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

[评注 1] 所谓无限接近应包括两层含义：一是充分接近，二是一致接近。充分接近就是当 n 充分大时，x_n 与 a 要多近就有多近，即无论给出多少小的正数，总可以找到一点 x_n，使得 x_n 与 a 之差小于这个数；一致接近是指甚至可以找到这样的点 x_n，使得排在 x_n 后的所有无穷多个点与 a 的距离均小于这个数。现在为了描述充分接近，给出一个量 ε，用以表示 x_n 与 a 的接近程度，即总有 x_n 满足 $|x_N - a| < \varepsilon$，而为了说明要多近就有多近，ε 必须是可以任意给定的；为了描述一致接近，再引入一个量 N，表示当给定一个接近程度 ε 时，数列中排在第 N 位以后的所有点 x_n 均满足上述不等式关系。可见，ε 总是任意给定的，处于主动地位，而 N 只有在 ε 在给定之后，才有可能被确定下来，处于被动地位。如此的 N 是否存在也就意谓着一个数列是否存在极限。

[评注 2] $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 表示，只要 n 充分大，x_n 与 a 就可以接近预先任意给定的程度，即 $|x_N - a| < \varepsilon$ 可以小于预先任意给定的正数 ε。但"x_n 越来越接近 a"一般理解为 $|x_n - a|$ 单调减少。

[评注 3] 在为微积分奠定理论的漫长过程中，法国数学家达朗贝尔也做出了重要贡献。他提出用极限概念代替牛顿的"最初和最终比"。他称一个量为另一个量的极限，就是后者趋向于前者，比任何给定的量都更接近于前者，但不等同于前者。他认为求方程的导数只是要求出方程中所包含的两个变量的差分之比的极限，他还给出了判别正项级数的"达朗贝尔法"。

[评注 4] 数学分析的奠基人、法国数学家柯西对数学的最大贡献是在微积分中引进了清晰和严格的表述与证明方法，使微积分摆脱了对于几何与运动的直观理解和物理解释，他对微积分的见解被普遍接受并沿用至今。柯西首先把无穷小量简单地定义为一个以零为极限的变量，

最早证明了极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的存在性，并在其中第一次使用极限符号“ lim ”。柯西的著作朴实无华，有思想，有创见。

定义 1.2.1：$\{x_n\}$ 为柯西列 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 n，$m>N$ 时有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$。

例如，数列 $y_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，由于 $y_{2n}-y_n=\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}>\dfrac{n}{n+n}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\{y_n\}$ 不是柯西列。

定理 1.2.1：$\{x_n\}$ 为柯西列 $\Leftrightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 收敛。

2．定量描述

如何让学生从柯西对极限的语言描述去理解魏尔斯托拉斯的 $\varepsilon-N$ 的描述？

（1）给定 $\varepsilon>0$，总能找到自然数 N，使得 $|x_N-a|<\varepsilon$。

[评注] 若 n 项以后的项与 a 误差很大，则不能反映出 x_n 无限接近 a。

（2）给定 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，就有 $|x_N-a|<\varepsilon$。

[评注] 对更小的误差 $\varepsilon_1>0$，若不能保证数列 x_n 自某项以后各项与 a 的误差小于 ε_1，也不能反映出 x_n 无限接近于 a。

定义 1.2.2（$\varepsilon-\delta$ 定义）：对于一个实数序列

$$x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n,\cdots$$

如果 a 是一个实数且有以下性质，我们就称 a 是以上数列的极限，或数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a：对任意一个正数 ε，必有一个自然数 N 存在，使当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$。我们用符号 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 来代表。

[评注] 德国数学家魏尔斯特拉斯的主要贡献在于函数论和分析方面，被誉为“现代分析之父”，“魏尔斯特拉斯的严格”成了“精细推理”的同义词，引进了现在通用的极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义，他还构造了一个著名的处处不可微的连续函数（1872 年 7 月 18 日）：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos\left(b^n\pi x\right)$ $\left(0<a<1,\ ab>1+\dfrac{3}{2}\pi,\ b\text{为奇数}\right)$，为分析学的算术化做出了重要贡献。（见例 2-1-12）数学家同我们其余的人一样都是人，为什么他们总是如此学究式地精确和如此不近人情地完美呢？正如魏尔斯特拉斯所说，“确实，一个没有几分诗人气质的数学家，永远不会成为一个完美的数学家”。答案就是：就诗一般完美这一事实而言，一个完美的数学家将会是某种数学上的不可能性。

3．极限的几何意义

数列 $\{x_n\}$ 以 a 的极限 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\{x_n\}$ 至多只有有限项落在区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 之外。

[评注 1] 数学符号的读音：ε [epsilon]，δ [delta]，π [pi]，$\sum$ [sigma]。数学符号“ $\forall$ ”与“ $\exists$ ”由德国数学家弗雷格（Frege，1848—1925）在 1884 年出版的《数论的基础》一书首先使用。“ $\forall$ ”表示“任意给定”，“ $\exists$ ”表示“存在”；“ ∞ ”这个符号由英国数学家约翰 · 沃利斯（John Walls，1616—1703）在其著作《无限的算术》（1656 年）中首先使用；匈牙利数学家黎斯（Riesz，1880—1956）在 1905 年引入符号“ $\to$ ”，表示连续地趋向一个极限；从 19 世纪活跃到 20 世纪的英国数学家哈代（Hardy，1877—1949）写下了 $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)=0$，这种写法与现在所使用的是相同的。

[评注 2] 极限$\varepsilon - N$的定义，蕴含着“有限与无限”对立统一的辩证思想，这是到目前为止人类找到的用“可以操作的有限”去认识“无法接触的无限”的最有效的数学方法。

[例 1-2-2] 证明：$x_n = (-1)^n$是发散的。

证明：取$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$，对任意$a \in \mathbf{R}$，$\forall$正整数$N$，都存在$2n > N$，使$x_{2n}$与$x_{2n+1}$不会落在邻域$\left(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2}\right)$内，即落在外边的有无穷多项。

[评注 1] 有界数列不一定有极限。

[评注 2] 数列$\{x_n\}$不存在极限，正好呈现一种对称美：存在某个$\varepsilon_0 > 0$，对于任意的正整数N，存在n_0，$m_0 > N$，有$\left|x_{n_0} - x_{m_0}\right| \geq \varepsilon_0 \Leftrightarrow$数列$\{x_n\}$无极限。

数列$\{x_n\}$不以a的极限$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall N$，$\exists n_N > N$，使得$|x_{n_N} - a| \geq \varepsilon_0$（即落在区间$(a - \varepsilon_0,\ a + \varepsilon_0)$之外有无穷多项）。

[例 1-2-3] 证明：$\lim\limits_{n \to \infty} \cos^n \alpha = 0 \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$。

[评注] 蓦然回首，我们发现一个无穷等比数列收敛，公比是-1～$+1$之间的实数，都恰好对应0°～180°中某个角的余弦值。为什么等比数列又称几何数列？或许这里就能给出解释。

4．**收敛数列$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$的有界性、唯一性及保号性**

有界性：必存在常数$M > 0$，使得$|x_n| \leq M \quad (n = 1，2，\cdots)$。

唯一性：如果$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$，则$a = b$。

保号性：若$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a < 0$，则必存在$N$，当$n > N$时，有$x_n < 0$。

定理 1.2.2 单调有界定理：单调增加有上界序列或单调减少有下界序列均存在极限。

定理 1.2.3 魏尔斯特拉斯-波尔查诺（Weierstrass-Bolzano）**定理**：

设$\{a_n\}$是一个有界序列，即存在实数M及$x \leq M$，$\forall x \in \boldsymbol{D}$使得

$$M \leq a_n \leq N，\forall n = 1，2，\cdots\cdots$$

则$\{a_n\}$有一了序列$\{a_{n_k}\}$，当$k \to \infty$时，$\{a_{n_k}\}$有极限。

[例 1-2-4] 数列$\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，$\cdots$的极限是多少？

解：令$X_n = \sqrt{2 + \mathrm{X}_{\mathrm{n-1}}}$，则$X_n$单调增加且$X_n < 2$，所以当$n \to \infty$时$X_n$的极限存在，令$X_n \to A$，则$A = \sqrt{2 + A}$，$A = 2$或$A = -1$（舍去）。

[评注 1] $X_n - X_{n-1} = \sqrt{2 + \mathrm{X}_{n-1}} - \sqrt{2 + \mathrm{X}_{n-2}} = \dfrac{X_{n-1} - X_{n-2}}{\sqrt{2 + X_{n-1}} + \sqrt{2 + X_{n-2}}}$。

[评注 2] $\sqrt{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{4}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\dfrac{\pi}{8}$，$\cdots$，$X_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \to 2(n \to \infty)$。

[评注 3] 不证明存在性是会有问题的，反例：$b_n = q^n\,(q > 1)$，令$b_n \to b$，则$b = bq$，$q = 1$错！

[例 1-2-5] 证明：序列的极限存在，并求极限A。

$$x_{n+1} = \frac{x_n({x^2}_n + 3a)}{(3{x^2}_n + a)}，a \geq 0，x_0 > 0$$

证明：由 $A=\dfrac{A(A^2+3a)}{(3A^2+a)}$，得 $A=\sqrt{a}$。

设 $x_0^2<a$，那么，$\dfrac{x_n^2+3a}{3x_n^2+a}>1$，即 $x_{n+1}>x_n$，

$x_{n+1}^2=\dfrac{x_n^2({x^2}_n+3a)^2}{(3{x^2}_n+a)^2}=f\left(x_n^2\right)$，

$f(z)=z\left(\dfrac{z+3a}{3z+a}\right)^2$，$f'(z)=3\dfrac{(z+3a)}{(3z+a)}\left(\dfrac{z-a}{3z+a}\right)^2>0$，

$f''(z)=\dfrac{96a^2\left(z-a\right)}{\left(3z+a\right)^4}$。

所以，$x_{n+1}^2=f(x_n^2)<f(a)=a$。所以，当 $x_0^2<a$ 时，$\{x_{n+1}\}$ 单调增加并收敛于 $\sqrt{a}$。同理，当 $x_0^2>a$ 时，$\{x_{n+1}\}$ 单调减少并收敛于 $\sqrt{a}$。

[评注] 对函数 $f(x)=x^2-a(a>0)$ 应用关于方程求根的哈雷（Halley，1656—1742）迭代序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f\left(x_n\right)f'\left(x_n\right)}{2\left[f'\left(x_n\right)\right]^2-f''\left(x_n\right)f\left(x_n\right)}$$

可产生求平方根 $\sqrt{a}$ 的迭代序列

$$x_{n+1}=\frac{x_n({x^2}_n+3a)}{(3{x^2}_n+a)}$$

定理 1.2.4 夹逼准则：若 $X_n\leq Y_n\leq Z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=A<\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}Z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=A$。

[例 1-2-6] 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\quad(|a|>1)$。

证明：对于任意正整数 m，当 n 充分大时，总有 $n!=m!(m+1)\cdots n>\dfrac{m!}{m^{n-m}}$。

取 $m>|a|$，则 $\dfrac{|a|}{m}<1$，$0\leq\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|<\dfrac{m^m}{m!}\left(\dfrac{|a|}{m}\right)^n$，注意到 $\left(\dfrac{|a|}{m}\right)^n\to 0\quad(n\to\infty)$。

[例 1-2-7] 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdot\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$=0。

[分析] 令 $x=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdot\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$，$y=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\cdot\cdot\dfrac{2n}{2n+1}$，则 $0<x^2<xy=\dfrac{1}{2n+1}$。

定义 1.2.3（$\varepsilon-\delta$ 定义的改进）：

设 $\{a_n\}$ 是无穷数列，如果有一个无界不减数列 $\{D_n\}$：$|a_n|\leq\dfrac{1}{D_n}$（对一切自然数 n），则称 $\{a_n\}$ 是无穷小数列。

数列极限概念的非 $\varepsilon-\delta$ 语言定义：对于数列 $\{a_n\}$，如果有一个实数 a，使 $\{a_n-a\}$ 是无穷小数列，则称 $\{a_n\}$ 以 a 的为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

[例 1-2-8] 已知数列 $\{a_n\}$ 以 0 为极限，令 $s_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$n=1, 2, 3, \cdots$

求证：$s_n\to 0\quad(n\to\infty)$。

证明：$\because a_n \to 0 \quad (n\to\infty)$，故有无界不减数列$\{D_n\}$，使$|a_n| \le \dfrac{1}{D_n} = d_n$，取$m<\sqrt{n}$便有

$$|s_n| \le \frac{d_1+d_2+d_3+\cdots+d_m}{n}+\frac{n-m}{n}d_{m+1} \le \frac{m}{n}d_1+d_m \le \frac{d_1}{\sqrt{n}}+d_m$$

[评注] 利用数列$\dfrac{1}{D_n}=d_n$的单调性，用代数符号代替了逻辑运算。

1.2.4 问题探究：美是一切事物生成和发展的本质特征

[例 1-2-9] 反正切的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}+\cdots+\arctan\frac{1}{2n^2}\right)=?$$

答案：$\dfrac{\pi}{4}$。注意使用公式$\arctan\dfrac{1}{2n-1}-\arctan\dfrac{1}{2n+1}=\arctan\dfrac{1}{2n^2}$，$n=1$，2，3，…

[评注] 美在奇异。数论大师赛尔伯格（Selberg，1917—2007）曾经说，他喜欢数学的一个动机是以下优雅漂亮的格列固里-莱布尼茨（Gregory-Leibniz）公式：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

这个公式实在美极了（见 5.2.5），奇数 1、3、5、…这样的组合可以给出圆周率，对于一个数学家来说，此公式正如一幅美丽图画或风景。

中国著名数学家、伟大的几何学家、快乐数学提倡者陈省身（Chern Shiing-shen，1911—2004）：有限与无限之转化，观古今于须臾，抚四海于一瞬（陆机《文赋》）。这是宇宙之美啊!

著名美学家、翻译家朱光潜（Zhu Guangqian，1897—1986）：美是一切事物生成和发展的本质特征。美是心借物的形象来表现情趣，是合规律性与合目的性的统一。

[例 1-2-10] 穷竭法。阿基米德（Archimedes，公元前 287—公元前 212）《论螺线》的命题 24：螺线（$\rho=a\theta$）第一圈与极轴所围的面积等于$\dfrac{4}{3}\pi^3a^2$。

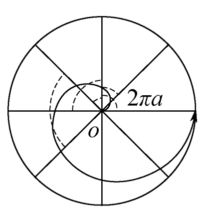


图 1.2.2 $\rho=a\theta$的示意图

解：设半径为OA的圆的面积为S，将圆n等分，设螺线和OA所围成的s'，它同样被分成n个部分，每个部分都夹在一个外接扇形和一个内接扇形之间，如图 1.2.2 所示。

$$\sum_{1}^{n-1}\text{内接扇形面积}<S'<\sum_{1}^{n}\text{外接扇形面积}$$

用微积分基本公式（见§5.2），这个面积就是

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\theta^2\mathrm{d}\vartheta=\frac{4}{3}a^2\pi^3$$

[评注 1] 阿基米德将他的螺线定义为当一条射线围绕着其一端的固定点匀速转动时，一个点顺着这条直线以均匀径向速度移动时的轨迹。

[评注 2] 阿基米德是古希腊力学家和数学家。他发展了前人的穷竭法，把面积或体积看做有重量的东西，由许多长条或薄片组成，然后用已知面积或体积去“平衡”这些元素，找出重心和支点，并利用杠杆原理来求出这些面积或体积。他的工作蕴含了微积分的思想。利用这些方法，他求出了抛物线弓形、螺线的面积，圆球体积等。穷竭法的核心思想是“无限接近”，这是一种蕴涵着“潜无穷”的极限思想，旨在解决“芝诺（Zeno of Elea，公元前 490—公元前

430）悖论”引发的第一次数学危机而首创“穷竭”原理的是古希腊伟大的数学家欧多克索斯（Eudoxus，公元前 400—公元前 347），后被阿基米德发扬光大为阿基米德公理：“$\forall a>0,b>0,\ \exists n\in \mathbf{N}^{+}$，使得 $na>b$”，欧多克索斯和阿基米德被认为是近代极限理论的先驱。关于杠杆原理，阿基米德曾说过“给我一个支点，我能撬动整个地球”。

[例 1-2-11] 符号$[\cdot]$和$\{\cdot\}$。设$[x]$表示不超过x的最大整数（见例 1-1-4），记号$\{x\}\equiv x-[x]$表示x的小数部分，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\right\}$（1977 年莫斯科铁道运输工程学院入学试题）。

分析：$\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\left(\sqrt{3}\right)^{k}2^{n-k}=A_n+B_n\sqrt{3}$。

其中，对应偶数k的那些项之和记为A_n，对应奇数k的那些项之和记为$B_n\sqrt{3}$。可见A_n、B_n都是整数。去掉第一项A_n，不影响小数部分$\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\right\}=\left\{B_n\sqrt{3}\right\}$。

为了进一步求$\left\{B_n\sqrt{3}\right\}$的表达式，打开思路，考虑对偶问题，我们有

$$0<\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}=A_n-B_n\sqrt{3}\to 0\quad (n\to\infty)$$

这说明A_n不仅是比$B_n\sqrt{3}$大的整数，而且是与$B_n\sqrt{3}$无限接近的整数。故$B_n\sqrt{3}$的小数部分

$$\left\{B_n\sqrt{3}\right\}=B_n\sqrt{3}-\left(A_n-1\right)=1-\left(A_n-B_n\sqrt{3}\right)\to 1\ （当\ n\to\infty）$$

[例 1-2-12]设$\{x_n\}$是由天体力学中的开普勒方程所确定的递推数列：

$$x_{n+1}=q\sin x_n+a\quad (n=0，1，2，\cdots)$$

其中，x_0是任意给定的实数，a，q为常数且$0<q<1$。证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$存在；（2）$l$是方程$x=q\sin x+a$的根。

证明：（1）由$\left|x_{n+1}-x_n\right|=q\left|\sin x_n-\sin x_{n-1}\right|$

$$=q\left|2\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right|\le q\left|x_n-x_{n-1}\right|\le\cdots\le q^{n}\left|x_1-x_0\right|$$

可得

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|\le\left|x_{n+p}-x_{n+p-1}\right|+\left|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}\right|+\cdots+\left|x_{n+1}-x_n\right|$$

$$\le\left(q^{n+p-1}+q^{n+p-2}+\cdots+q^{n}\right)\left|x_1-x_0\right|=\frac{q^{n}}{1-q}\left(1-q^{p}\right)\left|x_1-x_0\right|<\frac{q^{n}}{1-q}\left|x_1-x_0\right|$$

可知$\{x_n\}$是柯西列，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$存在。

（2）进一步，由$\left|\sin x_n-\sin l\right|\le\left|x_n-l\right|$可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin l$，在递推式中两边取极限得$l=q\sin l+a$。

[评注] 德国数学家、天文学家开普勒深信上帝是按照完美的数的原则创造世界的，所以根本性的数的和谐，即天体音乐，乃是行星运动的真实的可以发现的原因。这是鼓舞开普勒辛勤工作的真正动力。开普勒将奇妙的想象力、洋溢的热情、获取观测资料的无限耐心与对事实细节的极度服从结合起来。在获得了第谷 · 布拉赫的观察资料，并且自己做了更多的观测后，开普勒提出了天体运动三定律，据此被誉为“天空的立法者”。

[例 1-2-13] **阿基米德力学试探法**：阿基米德用力学的方法得到许多辉煌的成果，成为近代积分学的先驱。例如，抛物弓形$ABCD$的面积是等底等高的三角形ABC面积的$\dfrac{4}{3}$，如图 1.2.3

所示。

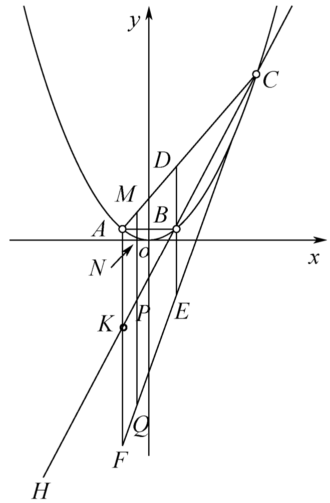


图 1.2.3 阿基米德力学试探法

已知：① 过 AC 中点 D 且平行于 y 轴的直线必过弓形的顶点 B（即在 ABC 弧上与 AC 距离最远的点）。

② B 是 DE 的中点；作 $AF // Oy$，过 C 点的切线 CF 于 F，延长 CB 交 AF 于 K，则 K 是 AF 的中点。取 $KH = KC$，过 AC 上任意点 M 作 $MQ // Oy$，交 CK 于 P，交 CF 于 Q。

③ $MQ : MN = AC : AM = KC : KP$。

④ 过 B 的切线必平行于 AC。

阿基米德的发现如下：

① 假想各线段的重量与长度成正比。

② 因为 HP 是一根以 K 为支点的杠杆，如果将 MN 放在 H 点，就可以和位于杠杆的另一端 P 的 MQ 平衡，P 是 MQ 的重心，此关系对任意 M 都成立。

③ 弓形可看做由许多这种 MN 线段构成的，而 ΔAFC 由许多 MQ 线段所组成。

若将整个弓形都放在 H 上（以 H 为重心），就可以和 ΔAFC 平衡。将 ΔAFC 的重量可以看做集中在其位于中线 KC 的重心上，而重心与 K 的距离是从 K 到 C 的 $\frac{1}{3}$ 处，故弓形的面积是 ΔAFC 的 $\frac{1}{3}$。

④ $\Delta AFC = 4\Delta ABC$（两个三角形同底，$AC = 2DE = 4DB$，高也是 4 倍）。

由此可以看出阿基米德解决问题的技巧多么高超，方法的妙用存乎一心，不能不令人叹为观止。

[例 1-2-14] 阐述数学等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ 所表达的数学思想或数学问题。

庄子（Zhuangzi，约公元前 369—公元前 286），中国战国时期哲学家，道家学派的代表人物。庄周名篇《庄子 · 天下》里面惠施（Hui Shi，约公元前 370—公元前 310）就讲：“一尺之捶，日取其半，万事不竭。”捶即为木杖。这个命题反应了“其小无内”的思想，即再小的物质也可以无限地分割，亦即物质是由无限小的单位组成的。此命题是说，一尺长的杖，取去一

半，以后每日取去余下的一半。余下的长度形成序列$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$，命题还认为序列的序号再大（万世），竭（0）只是趋向（极限），永远是达不到的。同时，寥寥十二个字，言简意赅，包含了大量的信息和哲理，形象地描述了从有限走向无限的朴素极限思想，所取之捶的和也应该是$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$，这是一个公比为$\frac{1}{2}$的等比数列的和，但庄周的高明之处就是已经看到了“ 一 ”就是计算的最终结果。

惠施是中国战国时期哲学家、名家代表人物。《庄子 · 天下》记载了惠施历物十事，其一讲：“ 至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一。”翻译为“ 极大的东西没有外围，可以叫做‘ 大一 ’；极小的东西没有内存，可以叫做‘ 小一 ’”。

[例 1-2-15] 记单位圆的内接正n边形的周长为$2a_n$，熟知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\pi$。

由直接计算得$a_6=3$，$a_{12}=3.10582854$，$a_{24}=3.13262861$。

如果令

$b_n=\frac{1}{3}\left(4a_{2n}-a_n\right)$，

$c_n=\frac{1}{15}\left(16b_{2n}-b_n\right)$，

则由a_6、a_{12}、a_{24}可算出

$$c_6=3.14159205$$

断言“ 序列$\{c_n\}$比序列$\{a_n\}$更快地收敛于π ”对吗？请证明自己的结论（第 5 届全国大学生数学夏令营试题，1991 年 7 月 29 日至 8 月 3 日）。

分析：由于$a_n=n\sin\frac{\pi}{n}$，因此用 Taylor 展开式（见§3.2）来表示a_n时，$a_n-\pi$趋于 0 的程度可以用$\frac{1}{n}$的幂次来衡量。因为

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(4a_{2n}-a_n\right)=\frac{1}{3}\left(4\pi-\pi\right)=\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{15}\lim_{n\to\infty}\left(16b_{2n}-b_n\right)=\frac{1}{15}\left(16\pi-\pi\right)=\pi$$

所以$c_n-\pi$也是与$\frac{1}{n}$的某幂次同阶的无穷小。所以只需且必须比较$a_n-\pi$与$c_n-\pi$的无穷小的阶。

解：序列$\{c_n\}$比序列$\{a_n\}$更快地收敛于π。

已知$a_n=n\sin\frac{\pi}{n}$，又$\sin x$的 Taylor 展开式为

$$\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}，\quad\forall x\in\mathbf{R}$$

因此

$$a_n=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}=\pi\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]$$

所以 $a_n-\pi$ 是与 $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ 同阶的无穷小。又

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{3}\left(4a_{2n}-a_n\right)\\
&= \frac{1}{3}\left\{\pi\left[4+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\cdot\frac{1}{4^{k-2}}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]-\pi\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]\right\}\\
&= \pi\left[1+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]
\end{aligned}$$

所以 $a_n-\pi$ 是与 $\left(\frac{1}{n}\right)^4$ 同阶的无穷小。同理：

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{15}\left(16b_{2n}-b_n\right)\\
&= \pi\left[1+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 15}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4^{k-3}}-1\right)\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right],
\end{aligned}$$

所以 $c_n-\pi$ 是与 $\left(\frac{1}{n}\right)^6$ 同阶的无穷小。因此，序列 $\{c_n\}$ 比序列 $\{a_n\}$ 更快地收敛于 π。

[例 1-2-16] May I have a large container of ( )?

（1）water （2）coffee （3）Alcohol （4）tea

答案是六个字母的（2）：3.1415926。

[评注] 1965 年，76 岁的中国历史学家陈寅恪（Chen Yinke，1890—1969）写文章追忆昔日为清华大学（1932 年）招生命题的经历，他出的上联是“孙行者”，而他的下联答案原本就是“胡适之”，孙加反拳旁即为猻，胡加反犬旁即为猢，猢猻者，猴子也，此可成对；行和适都是动词，者和之都是虚词，也可成对。可是一位考生对出了“祖冲之”，胜过陈先生的“标准答案”。其中“祖”对“孙”，姓氏对姓氏，又都是辈分上的名词；行和冲一为人动，一为水动，动词的意义也更相近，因而这一对子被称为千古绝对。

所有科学，包括逻辑和数学在内，都是有关时代的函数——所有科学连同它的理想和成就统统都是如此。

——穆尔（Moore，1862—1932）/芝加哥大学著名教授

一切自然现象只是少数几个永恒不变的规律的数学结构而已。

——拉普拉斯（Laplace，1749—1827）/法国的牛顿

§1.3 函数极限：微积分学的研究工具

内容提要：

具有奇异之美的“$\varepsilon-\delta$ 语言”是一百多年探索和挫折的总结；为使极限概念在坚实的数学基础之上的持续努力，其结果已包含在这个定义中十分精炼的语句里。只有用极限过程，才能建立微积分的基本概念。

函数极限是探究函数的局部变化趋势的数学概念，它是研究微积分学的主要数学工具。可以毫不夸张地讲，如果没有函数极限概念，那么微积分学将不复存在。人们研究极限的目的在于探究无穷：极限是一盏指引人们从“有限”走向“无限”的神灯。

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 合称为两个重要极限，最根本的理由就是以这两个极限为基础结合求导法则可以把一切初等函数的求导公式推导出来。另外，微分的核心思想（“以直代曲”）已蕴藏在这两个重要的函数极限之中。

极限精神（即追求卓越的精神）与德国物理化学家能斯特（Nernst，1864—1941）发现的热力学第三定律“绝对温度只能无限接近，而永远不能达到”的科学精神是相同的，与英国诗人莎士比亚（Shakespeare，1564—1616）的诗句“心愿无限，成事可数，欲海无边，实践有垠”所体现的人文精神也是相同的。

数学中有美，美中有数学①

我赞美那与我日夜相守的
数字、字母、符号、式子和图形，
像浮在空中轻轻飘荡的五色花瓣
萦绕在我的脑海之中；
像一个个流动的金属音符，
碰撞发出一串串清脆叮咚之声；
像钢琴上的键盘，
弹奏出悦耳的谐音；
像一道划破长空的闪电，
将我灵感的引线接通。

那数字、字母、符号、式子和图形，
在莫测的变幻里
组合出一个神奇的世界。
而我从方程、公式、图形的直觉
和逻辑推理中，
获得一种优美而崇高的体验，
痴情、忘我，融会成了
一种快慰和神圣的感情！

1.3.1　连续复利与“e”

某顾客向银行存入本金 P 元，n 年后他在银行的存款额是本金及利息之和，设银行规定复利率为 r，试根据下述不同的结算方式顾客的存款额。

（1）每年结算一次，第 n 年后顾客的存款额：$P_n^1=P(1+r)^n$。

① 易南轩．数学美拾趣．2 版．北京：科学出版社，2004.

（2）每月结算一次，第n年后顾客的存款额：复利率为$\dfrac{r}{12}$，共结算$12n$次，

故n年后顾客的存款额为$P_n^{12}=P\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12n}$。

（3）每年结算m次，复利率为$\dfrac{r}{m}$，共结算mn次，故n年后顾客的存款额为

$P_n^m=P\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{mn}$。

结论：结算次数越多，顾客的最终存款额也就越多。

（4）连续复利情况下，顾客的存款额记为P_n，则

$$\lim_{m\to\infty}P_n^m=\lim_{m\to\infty}P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}=P\left(1+\mathrm{e}^r-1\right)^n$$

连续复利情况下，相当于年复利率为e^r-1，按年结算，当r小时，$\mathrm{e}^r-1\approx r$

[评注 1] $y=1+x$是$y=\mathrm{e}^x$在$x=0$处的切线，故$\mathrm{e}^x-1\geq x$。

[评注 2] 1683 年，瑞士著名数学家雅各布 · 伯努利在研究连续复利时，才意识到问题需以$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$当$n\to\infty$时的极限来解决，但伯努利只估计出这个极限在 2 和 3 之间。欧拉利用无穷级数

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\cdots$$

首次算出e的 18 位近似值，还利用连分数证明了 e 是无理数。1873 年，法国著名数学家埃尔米特证明了 e 是超越数，即不存在整数m、n、r、…、a、b、c、…使得式子：$a\mathrm{e}^m+b\mathrm{e}^n+c\mathrm{e}^r+\cdots=0$成立。

思考题：老张存入 1000 元，复利率为 10%，以按年结算和连续复利结算，计算 10 年后老张在银行的存款额[$P_{10}^1=2593.74$，$P_{10}=2718.28$]。

[评注 3] 欣赏欧拉在《无穷小分析引论》中所表现出来的非凡的分析技巧：欧拉把二项式定理放在开头，即

$$(1+k)^l=1+\frac{l}{1}k+\frac{l(l-1)}{2!}k^2+\frac{l(l-1)(l-2)}{3!}k^3+\cdots$$

其中指数l设为整数。把这个展开式专用于

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{ny}$$

其中ny是整数。其后，他让n趋向无穷，把这个极限过程施加于级数的每一项，想到 e 是由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$定义的，所以得到指数级数：

$$\mathrm{e}^y=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots$$

肯定地说，欧拉完全不关心每一步推导在现代意义上是否严格！

1.3.2 函数极限

定义 1.3.1：自变量趋向于无限大时函数的极限 $\forall\varepsilon>0$，存在 X，当 $|x|>X$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 的极限为 A。

[评注] 当 $|x|>X$ 时，有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，以 A 为中心，以任意 ε 为半径做一带域，若自变量 X 落在（X，$+\infty$）或（$-\infty$，X）内，则函数 $f(x)$ 落在该带域内，如图 1.3.1 所示。

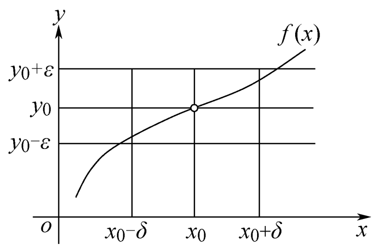


图 1.3.1 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$ 的几何意义

[例 1-3-1] 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$。

[评注 1] $y=1$ 是函数 y=$\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的水平渐进线。

[评注 2] $y=\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，极限不存在。

定义 1.3.2：自变量趋向于有限点时函数的极限。$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限为 A。

[评注 1] 1856 年，以追求严谨闻名的魏尔斯特拉斯给出了具有奇异之美的“ $\varepsilon-\delta$ 语言 ”：“ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ ”。

从此，那场持续了整整 200 年关于微积分基本概念的争论，终于因创立了严密的极限理论而宣告结束，从而成功平息了由“ 无穷小悖论 ”而引发的第二次数学危机。

[评注 2] 若有 $\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=A$ 是否成立？反之，若 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=A$，$\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=A$ 是否成立？

[例 1-3-2] 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$。

证明：我们有

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\leq\frac{1}{\sqrt{a}}|x-x_0|$$

对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\right\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{a}}|x-x_0|<\varepsilon$$

[例 1-3-3] 当 $x\to0$ 时，$y=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在。

[提示] 取 $x_{2n}=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$，$y_{2n}\to 0$；$x_{2n+1}=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}\to 0$，$y_{2n+1}\to 1$，如图 1.3.2 所示。

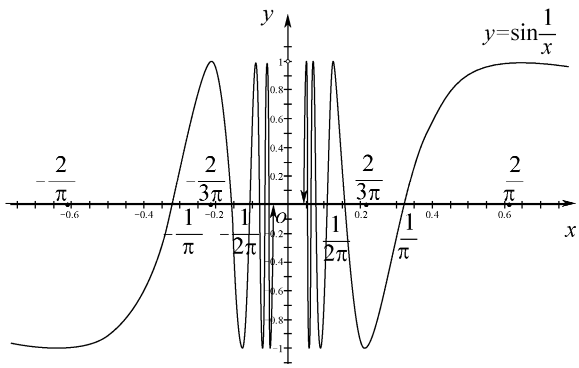


图 1.3.2　$y=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的图象

1.3.3　两个重要极限

定理 1.3.1：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$。

利用例 1-1-6 的结果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 来证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 是关键。

第一步，$x\to 0+0$，$\forall x\in(0,1)$，$\exists n\in N$，满足 $\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$，此时就成立：$\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n<(1+x)^{\frac{1}{x}}\le\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$。

第二步，$x\to 0-0$，令 $y=-x$，则 $y\to 0+0$。

第三步，令 $x=\dfrac{1}{t}$。

[例 1-3-4] $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}=\mathrm{e}^3$。

定理 1.3.2：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

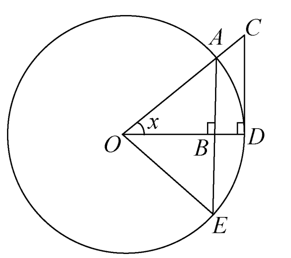


图 1.3.3　$\sin x<x<\tan x$ 示意图

[评注 1] 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x<\tan x$，如图 1.3.3 所示。分别取倒数后再乘以 $\sin x$ 可得到

$$\cos x<x^{-1}\sin x<1$$

由于 $\cos x$ 与 $x^{-1}\sin x$ 都是偶函数，于是 $\forall x\in(-\pi/2,\ 0)$，也有

$$\cos x<x^{-1}\sin x<1$$

由函数极限的夹逼定律，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

[评注 2]　利用单位圆的内接正 $2n$ 边形的面积 $S_{2n}=n\sin\dfrac{\pi}{n}\to\pi$ $(n\to\infty)$ 来证明

$\dfrac{\sin(x)}{x}\to 1\ (x\to 0)$，对任意 $\forall x\in(0,\ \pi/2)$，$\exists n\in N$，满足 $\dfrac{\pi}{n+1}\le x\le\dfrac{\pi}{n}$。

当 $n\ge 2$ 时，$\dfrac{n}{\pi(n+1)}(n+1)\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{n+1}{n\pi}\cdot n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，同理可证 $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

[评注 3] 比较：$f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 单调增加；$f(n)=\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调增加。

$g(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ 非单调增加；$g(n)=n\sin\dfrac{\pi}{n}$ 单调增加。

[例 1-3-5] 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$。

[例 1-3-6]　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$，如图 1.3.4 所示。

[评注] $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$。

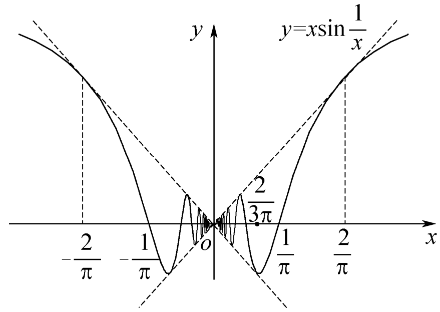


图 1.3.4　$y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的示意图

1.3.4　问题探究：极限之美

[例 1-3-7] 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)}{x^3}$。

[提示] 令 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)}{x^3}$，则 $A=\lim\limits_{3x\to 0}\dfrac{(3x-\sin 3x)}{(3x)^3}=\dfrac{A}{9}+\dfrac{4}{27}$。

[评注] 用洛必达法（见例 3-2-2）则更容易求出其结果：$A=\dfrac{1}{6}$。

[例 1-3-8]　$3\arccos(x)-\arccos(3x-4x^3)=?$，$|x|\le\dfrac{1}{2}$。

[提示] $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$，$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$，

$\cos nx=2^{n-1}\cos^n x+a_{n-1}\cos^{n-1}x+\ldots+a_0$　$3\arccos(x)-\arccos(3x-4x^3)=\pi$，$|x|\le\dfrac{1}{2}$。

[评注] 也可用微分中值定理求解，见例 3-1-5。

[例 1-3-9] 对于每一个实数的或复数的 x，证明

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+2\cos\left(\frac{2x}{3^k}\right)}{3}=\frac{\sin x}{x}$$

解：由恒等式 $\sin 3\theta-\sin\theta=2\sin\frac{1}{2}(3\theta-\theta)\cos\frac{1}{2}(3\theta+\theta)$，

导出恒等式 $\sin 3\theta=\sin\theta(1+2\cos 2\theta)$，

因此，对于任何 x，有

$$\begin{aligned}\sin x&=\sin\left(\frac{x}{3}\right)\left(1+2\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right)\\&=\sin\left(\frac{x}{9}\right)\left(1+2\cos\left(\frac{2x}{9}\right)\right)\left(1+2\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right)。\end{aligned}$$

经过 n 次迭代之后得

$$\sin x=\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\left(\frac{2x}{3^k}\right)\right)$$

当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\frac{x}{3^n}}\prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1+2\cos\left(\frac{2x}{3^k}\right)}{3}\right)$。

现在 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\frac{x}{3^n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\dfrac{1+2\cos\left(\frac{2x}{3^k}\right)}{3}=\dfrac{\sin x}{x}$。

[例 1-3-10] $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)=\dfrac{\sin x}{x}\quad(x\neq 0)$。

[评注 1] $2^n\sin\dfrac{x}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)=\cdots=\sin x$。

[评注 2] $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)=\dfrac{2}{\pi}$，而 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$。

由此，法国数学家韦达（Vieta，1540—1603）在研究三角学的过程中于 1579 年发现：

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

这是 π 的第一个分析表达式。用 2 和根号、加号、乘号就能计算出 π，真是妙不可言。

[例 1-3-11] 惊人的姐妹公式：

- $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{8}{7}\cdot\dfrac{8}{9}\cdots$

  $\dfrac{\pi}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}\left[\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right]^2$　　（沃利斯公式）；

- $\dfrac{\mathrm{e}}{2}=\left(\dfrac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots$ （Pippenger）[①]。

[评注 1]写出第 v 个式子的表达式：

$$\sqrt[2^v]{\left[\frac{\left(2^v!!\right)\left(\left(2^{v-1}-1\right)!!\right)}{\left(\left(2^v-1\right)!!\right)\left(2^{v-1}!!\right)}\right]^2\frac{1}{2}}$$

再利用斯特林公式 $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}}$，$0<\theta<1$，并令 $n\to\infty$，即可得到证明。

[评注 2]设 $I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\mathrm{d}x$，则 $I_{2n}=\dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{2n-3}{2n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$，

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2}{3},$$

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$0<\sin x<1$，故 $\dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}>\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}>1$

把上面的 I_{2n-1} 的值代入最后一个不等式，我们有

$$\frac{2n+1}{2n}>\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-1)(2n-1)(2n+1)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot7\cdot\ \cdots\ \cdot(2n)(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}>1$$

令 $n\to\infty$ 并取极限，则中间项趋于 1，因此得到把 $\dfrac{\pi}{2}$ 表示为有理数列的极限的沃利斯公式（1650 年）：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ \cdots\ \cdot(2n)(2n)\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-1)(2n-1)(2n+1)\cdots}$$

[评注 3] $\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}=\left(1-\dfrac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{4^2}\right)\cdots$

这个无限乘积公式对所有的 x 值都是收敛的，它是数学中最漂亮的公式之一。对 $x=\dfrac{1}{2}$，它变为

$$\frac{2}{\pi}=\left(1-\frac{1}{2^2\cdot1^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2\cdot2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2\cdot3^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2\cdot4^2}\right)\cdots$$

因为 $1-\dfrac{1}{2^2n^2}=\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot2n}$，同样可得到威廉斯乘积

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots.$$

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

[评注 4] 英国数学家沃利斯在其著作《无穷算术》（1665 年）中给出了关于变量极限的正确概念：“变量的极限——这是变量如此逼近的一个常数，它们之间的差能够小于任何给定的

① 吴振奎，吴旻，吴彬．品数学．北京：清华大学出版社，2010.

量。”，然而他的极限概念一直未被人们使用。

[例 1-3-12] 试证：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$。

[提示] 设ε为任意给定，而$0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$，则

$$0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$\le\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x\le\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}$$

因$0<\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)<1$，$\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\sin^n\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\to 0\quad(n\to\infty)$，

故$\exists N>0$，$n>N$时，$\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\sin^n\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

从而上式$<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$。

无穷这个概念是我们最伟大的朋友；它也是我们心灵平静的最大敌人……魏尔斯特拉斯教会我们相信，我们已最终完全驯服了这个难以驾驭的概念。但事实并非如此，它又挣脱了。希尔伯特和布劳威尔（Brouwer，1881—1966）已开始再次驯服它。但是要多长时间呢？我们拭目以待。

——詹姆斯 · 皮尔庞特（James Pierpont，《美国数学学会会报》，1928）

数学，如果正确地看，不但拥有真理，也具有至高无上的美——一种严峻的美，雕刻的美，没有向弱点做任何的迁就；没有音乐和绘画的装饰，而是令人惊异的纯真，具有最伟大的艺术品所显示的完美。

——伯特兰 · 罗素（Bertrand Russell，1872—1970）/英国哲学家、获诺贝尔文学奖的数学家

§1.4　无穷小量与无穷大量：无穷是数学的灵魂

内容提要：

无穷小量以零为极限的变量，是微积分的基本概念之一。例如，当$n\to+\infty$时，$1/n$及e^{-n}都是无穷小量；当$x\to 0$时，x^2及$\sin x$都是无穷小量。一般来说，当$x\to a$时，$f(x)\to 0$，则称$y=f(x)$是一个无穷小量。显然，两个无穷小量之和、差、积都是无穷小量，但两个无穷小量之比不一定是无穷小量。例如，当$x\to 0$时，x及$\sin x$都是无穷小量，但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

微积分的历史是一部关于“无穷”的历史，它是一代代数学家用激情演绎的跌宕起伏的长篇叙事诗和寓情于理的哲理诗。英国哲学家乔治 · 贝克莱（George Berkeley，1685—1753）对无穷小量的诘问（即一个量或者有，或者没有；如果有，它就不会消失；如果没有，它就确实消失了），使牛顿、莱布尼茨在 17 世纪 60 年代发明的微积分产生重大危机，柯西对构建的微积分的重大遗漏做了补救，而完善微积分理论的代表人物就是 19 世纪德国伟大的数学家魏尔斯特拉斯。就微积分而言，浪漫是无穷的别名，不拘是无穷的性格，收敛是极限的归途，有限是极限的特征。

整体即美：“不抛弃一切，广收博纳，卑微的、受挫的、变态的，全部拥抱着，世界坦荡

地展示自己的美。**整体即美**，美不是荆棘包围的窄圈里的东西，造物主能在静寂的夜空毫不费力地向世人昭示。”这就是印度著名诗人泰戈尔（Tagore，1861—1941）强调的真理。

当我们完美地认识真理时，我们才能真正地懂得美。完美地认识了真理，人的目光才纯净，心灵才圣洁，才能不受阻挠地看见世界各地蕴藏的欢乐。

现代微积分理论基础的建立是认识上的一个飞跃。极限概念揭示了变量与常量、有限与无限的辩证的对立统一关系。从极限的观点看，无穷小量不过是极限为零的变量，即在变化过程中，它的值可以“非零”，但它的趋向是“零”，可以无限地接近于“零”。因此，现代微积分理论的建立，不仅消除了微积分长期以来带有的“神秘性”，使得贝克莱（Berkeley，1685—1753）主教等神学信仰者对微积分的攻击彻底破产，而且在思想上和方法上深刻影响了近代数学的发展。这就是微积分对哲学的启示，对人类文化的启示和影响[①]。

著名数学家戴维·希尔伯特（Dave Hilbert，1862—1943）说过：“数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正在各个部分之间的联系。”

蒂莫西·高尔斯[②]（Timothy Gowers，1963—）教授强调数学是一个整体的时候曾说，如果把所有的数学分支按是否有联系组成一个网络，一定是一个连通的网络，而不会有一些学科，尽管它们看来与其他分支联系很少，游离于整个数学这一网络之外。这正像有些人有很多亲戚朋友，有些人则很少，但整个社会的人群所组成的网络仍是连通的一样。

1.4.1　无穷小量与无穷大量

1．无穷小量与无穷大量的直观概念

[例 1-4-1] 观察下列函数的极限。

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$　（2）$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$　（3）$\lim\limits_{x\to0+0} \ln x = -\infty$

（4）$\lim\limits_{x\to0+0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$　（5）$\lim\limits_{x\to0-0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$　（6）$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 是无穷小量。

若当 $x\to x_0$ 时，$|f(x)|$ 无限变大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大量。

2．无穷小量与无穷大量

定义 1.4.1：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0$，$\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<-M$；

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|<\varepsilon$。

[评注] 1665 年，“∞”第一次出现在约翰·沃利斯的《无尽算术》一书中，表示“无穷”。

[例 1-4-2] 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty\ (|q|>1)$。

[评注] $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\ (|q|<1)$；当 $q=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$；当 $q=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ 不存在。

[例 1-4-3] 函数 $f(x) = x\cos x$ 是（　　）。

（1）非周期函数　（2）非单调函数

---

① 易南轩．王芝平．多元视角下的数学文化．北京：科学出版社，2007.

② [英]蒂莫西·高尔斯．数学．刘熙译．南京：译林出版社，2014.

（3）在$(-\infty,+\infty)$内无界　　　　（4）非无穷大量

[评注 1] 非周期函数。反证，设周期为$T\neq 0$，则$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x$。

取$x=0$得$\cos T=0$，所以$T=n_0\pi+\dfrac{\pi}{2}$；取$x=n_0\pi+\dfrac{\pi}{2}$，得

$T=(n_0\pi+\pi)\cos(n_0\pi+\pi)=0$，矛盾！

[评注 2] 非单调，非无穷大量，无界。对任意$M>0$，总存在x，使$|f(x)|>M$，如$f(2n\pi)=2n\pi$，当$n>\dfrac{M}{2\pi}$，就有$|f(x)|>M$。另外，$f(x)$对于任意给定的正数，但不能保证无限增大的趋势，如$f(2n\pi)=2n\pi$，而$f\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$。

[例 1-4-4] 多项式$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$，$\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$。

[提示]

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right|\\&\geq|a_n|\left[|x|-\left(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|\right)\right]|x|^{n-1}\quad(|x|>1)\\&\geq|a_n||x|^n/2\quad\left(|x|>2\left(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|\right)\right)。\end{aligned}$$

对于任意$M>0$，取$X=\max\left\{\left(1,2\left(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|\right),\sqrt[n]{\dfrac{2M}{|a_n|}}\right)\right\}$。

这表明，$\forall M>0$，当$|x|>X$时，$|f(x)|>M$，即$\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$。

3．无穷小量与无穷大量的倒数关系

定理 1.4.1：若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$，则$\lim\limits_{x\to\square}1/f(x)=0$。

[评述] □代表∞，$\pm\infty$，$\pm x_0$，x_0六种情况之一。

4．极限与无穷小量的关系

定理 1.4.2：若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$，则$f(x)=A+\alpha(x)$的充要条件是$\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0$。

5．无穷小量的性质

性质 1：有限个无穷小量的和差积仍为无穷小。

性质 2：有界函数（含常数）与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

[例 1-4-5] 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，且$|y_n\leq M|$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$。

1.4.2　极限的四则运算

[例 1-4-6] $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)\neq\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}$。

正确解法如图 1.4.1 所示。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

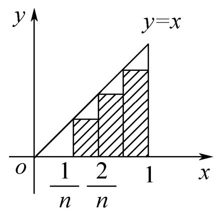


图 1.4.1　三角形 $y=x$、$y=0$、$x=1$ 示意图

[评述 1] 此极限是三角形 $y=x$、$y=0$、$x=1$ 的面积，即 $\frac{1}{2}$。

[评述 2] 只须证明加、积及倒数的极限规则即可。

$\forall\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\exists N_1$，$n>N_1$，$|a_n-a|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0\Rightarrow\exists N_2,\ n>N_2$，$|b_n-b|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0\Rightarrow\exists N_3,\ n>N_3,\ |b_n|>\frac{1}{2}|b|$；

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0\Rightarrow\exists M>0,\ \exists N_4,\ n>N_4,\ |b_n|\leq M$；

$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\{N_1,N_2,N_4\}$，当 $n>N$ 时，

$|a_nb_n-ab|=|b_n(a_n-a)+a(b_n-b)|<|b_n||a_n-a|+|a||b_n-b|\leq(M+|a|)\varepsilon$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab$。

$\forall\varepsilon>0$，取 $N'=\max\{N_2,N_3\}$，当 $n>N'$ 时

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{b_n-b}{b_nb}\right|<\frac{2|b_n-b|}{b^2}<\frac{2}{b^2}\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}1/b_n=1/b$。

[评注 3] 关于极限的四则运算法则，应注意以下几点。

（1）参加运算的是有限个函数，且它们的极限都存在，商的极限要求分母的极限不为 0。

（2）对某些不能直接利用四则运算法则的极限，有时可采用如下办法。

方法 1：利用无穷小量和无穷大量互为倒数的关系。

方法 2：利用无穷小量与有界函数的乘积仍为无穷小量的性质。

方法 3：将函数变形，化为能够直接运用运算法则的情形。

方法 4：直接利用极限或无穷大量的概念判断。

1.4.3　渐进线的定义

定义 1.4.2：当点 (x,y) 沿曲线 $y=f(x)$ 趋向于无穷大时，若它到直线的 $y=kx+b\quad(k\neq0)$ 的距离趋向于 0，则称该直线为曲线的渐进线，如图 1.4.2 所示。

由 $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-kx-b|=0$，得 $b=\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-kx|$，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$。

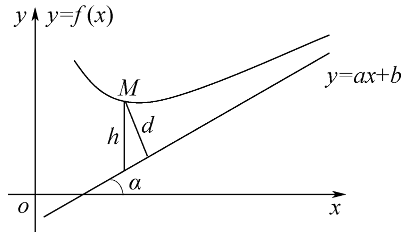


图 1.4.2 曲线 $y=f(x)$ 的渐近线 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$

[评注] 若 $k=0$，则直线 $y=b$ 称为水平渐进线。

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐进线。

[例 1-4-7] 求曲线的渐进线。

（1） $f(x)=\dfrac{2x}{(x-1)}$，水平渐进线 $y=2$，铅直渐进线 $x=1$。

（2） $f(x)=\sqrt{1+x^2}$， $y=\pm x$ 为斜渐进线。

1.4.4 无穷小量的比较

定义 1.4.3：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$， $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$。

（1）若 $A\neq 0$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小量，记为 $f(x)=O\big(g(x)\big)$ $(x\to x_0)$。

特别的：当 $A=1$ 时，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价的无穷小量，记为 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$。

（2）若 $A=0$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 阶数更高的无穷小量，记为 $f(x)=o\big(g(x)\big)$ $\big(x\to x_0\big)$。

[评注] 大欧“ O ”是大写的英文字母 O，是无限接近零的速度的符号；小欧“ o ”是小写的英文字母 o，是表示无穷小的程度的符号。高阶无穷小量的直观解释就是与原点 o 的距离高度接近。在较为复杂的数学运算中，有时候往往可以将速度较小的那部分（高阶无穷小）忽略不计，其关键是要掌握小到什么程度才可以将其略去， O 和 o 就是用来表示这个程度的符号，它们在无穷小分析中具有特别重要的地位，而且在构建导数、微分与幂级数的理论中也起着决定性的作用。这两个符号是 19 世纪的德国数学家兰道（Landau，1877—1938）首先使用的，因此称其为兰道符号。

定理 1.4.3：**等价代换定理**：

若 $\alpha\sim\beta$， $\alpha'\sim\beta'$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}=A$ 或 ∞，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A$。

[例 1-4-8] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x-\sin x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$。

[评注] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x-\sin x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-x)}{x^3}$=0，对吗？

[例 1-4-9] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x-1+\sqrt{1+x^2})}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1+\sqrt{1+x^2})(-x+1+\sqrt{1+x^2})}{x(-x+1+\sqrt{1+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(-x+1+\sqrt{1+x^2})}=1。$$

[例 1-4-10] 求极限：

$$\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin(2x))^{\frac{1}{2x}}=\mathrm{e}\text{。}$$

[评注 1] 记住下列常用的等价无穷小：

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad (1-\alpha x)^{\frac{1}{n}}\sim\frac{-a}{n}x,\quad x-\tan x\sim\frac{-1}{3}x^3\text{。}$$

当 $f(x)\to 0$ 时，可将上式中的 x 换为 $f(x)$，如 $\sin f(x)\sim f(x)$。

[评注 2] 做乘除法时尽量用等价无穷小代换，使之简化。做加减法最好不要用等价无穷小代换。

1.4.5　问题探索：整体之美

[例 1-4-11] 有界函数与无穷小量的关系。

设 $f(x)$ 有界，且 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)\alpha(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0$，对吗？

[反例] $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{是无理数}\\ 0, & x\text{是有理数}\end{cases}$，$\alpha(x)=\begin{cases}0, & x\text{是无理数}\\ 1, & x\text{是有理数}\end{cases}$。

[例 1-4-12] o 符号 当 $x\to 0$ 时，

（1） $o\left(x^m\right)\pm o\left(x^n\right)=o\left(x^{\min(m,n)}\right)$　　[是]

（2） $o\left(x^m\right)\cdot o\left(x^n\right)=o\left(x^{m+n}\right)$　　[是]

（3） $o\left(x^m\right)-o\left(x^n\right)=0$　　[反例] $x^5=o\left(x^4\right)$，$x^6=o\left(x^4\right)$

（4）当 $m>n$ 时，$\dfrac{o\left(x^m\right)}{o\left(x^n\right)}=o\left(x^{m-n}\right)$　　[反例] $x^4=o\left(x^3\right)$，$x^3=o\left(x^2\right)$

[例 1-4-13] 当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则实数 $a=?$

答案：$a=-\dfrac{3}{2}$。

[例 1-4-14] 如果计算工具不能做除法，为了确定 $\dfrac{1}{a}$（$a>0$）的十进制小数值，有时用递推公式 $x_{k+1}=x_k\left(2-ax_k\right)$，$k=0$，1，2，$\cdots$ 是方便的，试求 x_0 的界限，以保证用这样的开始值 x_0 使上述递推公式能够收敛于 $\dfrac{1}{a}$。

[评注] $x_{k+1}=x_k\left(2-ax_k\right)\Rightarrow 1-ax_{k+1}=\left(1-ax_k\right)^2$，则 $1-ax_n=\left(1-ax_0\right)^{2^n}$，显然当且仅当 $\left|1-ax_0\right|<1$，即 $0<x_0<\dfrac{2}{a}$ 时，有 $1-ax_n\to 0$，即 $x_n\to\dfrac{1}{a}$。

[例 1-4-15] 一位英文老师出了这样一道题：

（1） (　　　) is better than the god.

（2） (　　) is worse than the evil.

（3） if you eat (　　),you will die.

要求三个空中填上同样一个单词，结果无人能解答出来。后来一位数学老师用数学推理方

法居然解了出来。过程如下：

解：设上帝(god)之善是 $+\infty$，设恶魔(evil)之恶是 $-\infty$。令所求答案为 x，

则有 $x > +\infty$，$x < -\infty\, x$，$\therefore x$ 属于空集合，$\therefore x =$ nothing。

回答：**nothing** is better than the god. (没有什么比上帝更好。)

nothing is worse than the evil. (也没有什么比恶魔更坏。)

if you eat **nothing**, you will die. (如果你什么也没有吃，那么你就会死!)

1.4.6　无穷的文学意境

1．无穷小量的文学意境

（1）极限语言近于诗。数学名家徐利治（1920—）先生在课堂上讲无穷小量的极限语言：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists X_0>0$，当 $x>X_0$ 时有 $\dfrac{1}{x}<\varepsilon$ 与唐代诗人李白（Li Bai，701—762）的《送孟浩然之广陵》：“故人西辞黄鹤楼，烟花三月下扬州。孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流。”具有相同的文学意境，煞是传神。

（2）柯西首先把无穷小量简单地定义为一个以零为极限的变量，柯西给极限的经典定义，可写成如下一首《极限》诗：

当属一个
变量的相继的值
无限地趋近
某个固定值时
如果
最终同固定值之差
可以任意小
那么这个固定的值
就称为所有这些值的
极限

[评注]《我是○》。作者：田地（1962—）。我是圆圈；我是点点。/我是空虚，我是饱满。/我是静止；我是发展。/我是衰迈；我是华年。/我是可摸的平面；我是无底的深渊。/我可以有增有减，我可以有增无减。/我有时小得不可捉摸；我有时大得难以计算。/我是忧患；我是欢喜。我能成为锁链；我能变为花环。/我是完整的自己；我是我的对立面①。

人类很早就发现了自然数，但是我（即零）的发现却晚得多，岂不怪哉！这项贡献归功于印度人。公元前 876 年，印度数学家意识到零是实际存在的数，而不仅仅表示空位或一无所有，欧洲到 1500 年左右，零才能被接受作为一个数。零源于印度，在公元前二千多年，最古老的印度文献《吠陀》中已经提到了它；其实零也是“国粹”：13 世纪 40 年代，河北的李治（Li Zhi，628—683），浙江的秦九韶（Qin Jiushao，约 1202—1261），都不约而同地在他们所写的书中，用我表示了空位，而当时阿拉伯数字尚未传入我国。零是自然数中的珍宝，如果没有零，整部数学机器就没有办法开动了。零的作用：表示空位、统一标准、简化规则。

① 王青建．数学开心辞典．2 版．北京：科学出版社，2014.

2．无穷大量的文学意境

愚公移山：虽我之死，有子存焉；子又生孙，孙又生子；子又有子。子子孙孙，无穷匮也，而山不加增，何苦而不平？（《列子 · 汤问》，作者列御寇（公元前 476—公元前 221)，战国人）。

这一我们熟知的故事恰能符合近代无穷大量的数学定义：对于任意给定大的数 $A>0$，总存在 a_n 的足标 N，当 $n>N$ 时，所有 $|a_n|>A$，那么 $\{a_n\}$ 是无穷大。故事所说愚公一家，子子孙孙所取土方和作为 $\{a_n\}$；大山土方虽大（给定 A）但“山不加增”；总有一天，“无穷匮也”，（$n>N$）“何苦而不平？”（$a_n>A$）。此题与庄周名辩、无穷小列两相媲美，而且“无穷”一词，应自列子始。

3．无界变量的文学意境

（1）南宋的叶绍翁（Ye Shaoweng，1194?—?）写出了《游园不值》：“应怜屐齿印苍苔，小扣柴扉久不开。春色满园关不住，一枝红杏出墙来。”其特色在于：描绘早春之景“以少总多”、含蓄蕴藉、景中有情、诗中有人、寓有哲理。用小景写大景，概括大地的“春色”于一“园”，并赋予崇高的灵魂美，有特殊的艺术效果。这“一枝红杏”，正是“满园春色”的集中表现，眼看出墙的“红杏”，心想墙内的百花。实际上，无界变量是说，无论设置怎样大的正数 M，变量总要超出范围，即有一个变量的绝对值会超过 M。于是，M 可以比喻成可以无限大的园子，变量相当于红杏，结果是总有一枝红杏超出园子的范围。诗的比喻将抽象的数学语言形象化，既有趣，又便于记忆。

(2)《世界上最遥远的距离》的作者是泰戈尔

世界上最遥远的距离/不是生与死/而是我就站在你面前/你却不知道我爱你;

世界上最遥远的距离/不是我就站在你面前/你却不知道我爱你/而是明明知道彼此相爱/却不能在一起;

世界上最遥远的距离/不是明明知道彼此相爱/却不能在一起/而是明明无法抵挡这股思念/却还得故意装作丝毫没有把你放在心里;

世界上最遥远的距离/不是明明无法阻挡这股思念/却还得故意装作丝毫没有把你放在心里/而是用自己冷漠的心对爱你的人/掘了一条无法跨越的沟渠。

（3）初唐诗人陈子昂（Chen Zi’ang，661—702）的《登幽州台歌》云：前不见古人，后不见来者（一维直线）。念天地之悠悠，独怆然而涕下。

陈子昂作为一个思古想今、展望大地的学者，感叹天地之宏大、时间之遥远，觉人生之短暂、视野之狭隘，遂有上述的诗意。从数学上看来，这是一首阐发时间和空间感知的佳句。这样的意境，在数学家和文学家之间是可以彼此相通的。

[评注]诗是文化大家族的小精灵，是穿透心扉的无形力量。例如，汪国真（1956—2015）的名句“没有比脚更长的路，没有比人更高的山。”在 2013 亚太经合组织（APEC）工商领导人峰会上，被国家主席习近平引用。

4．实无限与潜无限

请问：杜甫（Du Fu，712—770）《登高》“无边落木萧萧下，不尽长江滚滚来。”哪一句描述的是实无限，哪一句描述的潜无限？

答案：前一句是实无限，而后一句是潜无限。

[评注 1]“无边落木”就是指“无限多的所有落木”，这是一个实无限的集合，已被我们一览无余。所谓“潜无限”，它没完没了，不断地“滚滚”而来，尽管到现在为止还是有限的，却永远不会停止。

[评注 2] “ 无穷 ” 这一概念是数学中最微妙的概念之一，两个“ 无穷 ” 之间非但未见得相同，简直可以相距要多遥远有多遥远，甚至相距无穷远！

德国数学家赫尔曼 · 外尔（HermannWeyl，1885—1955）说：“ 无穷是数学的灵魂。”

德国大数学家希尔伯特名言：“ 没有任何问题可以像无穷那样深深地触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想，然而，也没有任何其他的概念能像无穷那样需要加以阐明。”

只有采取去无穷小的观察单元——历史的微分，并运用积分的方法得到这些无穷小的总和，我们才能得到问题的答案——历史的规律。正是这门学问（微积分），纠正了人类由于只观察个别单元所不能不犯下的和无法避免的错误。

——托尔斯泰（Tolstory，1828—1910）/俄国思想家、哲学家

求知欲是人类的本性之一。遗憾的是，已确立的各种宗教不再提供令人满意的答案，这就是转变成对确定性和真理的一种需求。这就是数学为什么而运作，为什么人们为之奉献终身。它是对真理的渴望，是对驱动着数学家的数学之美妙和优雅的回应。

——克莱（Clay）/克莱千年难题的赞助人

§1.5　连续函数：连续的本质是极限

内容提要：

客观世界中的许多现象和事物不仅是运动变化的，其运动变化的过程还是连绵不断的，人们希望定量描述连绵不断变化的事物（或现象）的规律，导致连续函数概念的产生。

微积分学要研究的可微函数类包含在连续函数中，而且微积分学的研究方法与连续函数的局部状态的研究方法是相同的，都采用局部分析法。本节介绍连续函数概念、连续函数的局部性态及整体形态。

自变量连续变动时函数值也连续变动的函数，称为连续函数。函数连续性的确切定义要借助于极限概念。设 $f:X\to Y$ 是一个在点 a 处附近有定义的函数。若当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 的极限恰好是 $f(a)$，则称函数 f 在点 a 处连续。若函数 f 在定义域中的每一点都连续，则称 f 是连续函数。可以证明初等函数在其定义区间内是连续的。

另外，一个在一个闭区间连续的函数总是在该区间上（黎曼）是可积的。

以美启智：我们常说“ 以美启智 ”，是说对数学美，从欣赏、挖掘、感知，到体验、陶冶、品味的过程中，我们的数学思维能力与审美能力会得到磨砺，分析与解决问题的能力会不断得到提高。

研究函数的连续性的实质是探讨函数的局部性态。函数连续性与李白的诗句“ 抽刀断水水更流，举杯消愁愁更愁 ” 描述连续函数的意境相通。

1.5.1　连续函数的概念

1．函数在某点连续的概念

定义 1.5.1：设在 (a,b) 内，若 $\lim\limits_{x\to x0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。x_0 称为连续点。

[评注 1] 若 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，对吗？

[反例] $f(x)=\begin{cases}-1, & x\text{是有理数} \\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$。

[评注 2] 用 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述在 x_0 点连续：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

[评注 3] 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，有两个等价的定式：

（1）$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\{f(x_0+\Delta x)-f(x)]=0$。

（2）$\lim\limits_{x\to x0}f(x)=f(x_0)$（对于分段函数 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$）。

即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须且只需满足下列三个条件：

① 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，即 $f(x_0)$ 有意义；

② 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必须存在(即为有限值)；

③ 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 值刚好等于函数值 $f(x_0)$。

[评注 4] 在微积分创建之初，人们能把一笔画成的曲线对应的函数理解为连续函数，从而在他们的眼里，函数的连续性是一种很自然的整体态势。而在那个时代之前，人们通常把函数理解为一个解析式子，因此很自然地认为函数总是连续的，但在 1829 年德国数学家狄利克雷以他的名字命名的函数 $D(x)$（见例 1-1-2，例 5-1-1）竟然处处不连续，到此时人们才意识到有必要对函数的连续性进行探讨。连续的本质是极限，自从柯西等伟人在 19 世纪创立极限理论之后，人们才正确认识到研究函数的连续性的实质是探讨函数的局部性态。

日常生活中谈论连续性，通常是指没有发生什么了不起的惊喜之事，一切都在如常进行，这与数学中连续的含义是相通的，更与李白的诗句“抽刀断水水更流，举杯消愁愁更愁”描述连续函数的意境相通。

[评注 5] 在实数和连续性理论方面的探索，是德国数学家戴德金的主要贡献之一。他注意到当时微积分学实际上缺乏严谨的逻辑基础，对无理数还没有严密的分析和论证，因而定义并详尽解释了所谓的“戴德金分割”，给出了无理数及连续性的纯算术定义。1872 年，他的《连续性与无理数》出版，使他与康托尔、魏尔斯特拉斯等一起成为现代实数理论的奠基人。

[评注 6] 自从电报诞生以来，人们见到的讯息传播的基本单位是离散的，如点和划。而到了电话时代，同样明显不过的是有用的信息是连续的，如声音和颜色，它们沿着频谱逐渐变化，融合得天衣无缝。哈特利（Hartley，1912—1988）延续了哈里·奈奎斯特（Harry Nyquist，1889—1976）的观点①，认为连续曲线应该被看做一连串离散的步骤逼近得到极限，而这些步骤反过来可以通过对波形进行间隔采样而还原出来。采用这样的办法，电话就可以同电报一样使用相同的数学分析。哈特利进而通过一项粗略但令人信服的分析证明了在这两种情况下，讯息的信息量都取决于两个因素：传输所用的时间，以及信道的带宽。

2．间断点的分类

函数的定义域内的不连续的点称为间断点。间断点可分为 3 类：

(1) 设函数 f 在一点 a 附近有定义。若当 x 自 a 的左方和右方趋向 a 时 $f(x)$ 有极限并相等，但该极限不等于函数值 $f(a)$，这时点 a 被称为可去间断点。

（2）若当 x 自 a 的左方和右方趋向 a 时 $f(x)$ 分别有极限，但该两极限不相等，这时点 a 被称为 f 的第一类间断点。例如，函数 $y=x-[x]$ 的间断点（即每一个整数）都是第一类间断点。

（3）除了上述两类间断点之外的其他间断点都被称为第二类间断点。例如，狄利克雷函数

① [美]詹姆斯 · 格雷克．信息简史．高博译．北京：人民邮电出版社，2014.

在任意点都是第二类间断点。

[评注 1] “连续”与“间断”似乎是对立的数学概念，但人们在研究实际问题时，往往会互相转化。例如，通信中欲想将一个服从正态分布的曲线发送出去，则只需要传递两个关键的参数即数学期望和方差即可。王之涣的诗句“欲穷千里目，更上一层楼”可用之于解释函数间断的含义。元代戏曲作家马致远（Ma Zhiyuan，1250—1324）的《天净沙 · 秋思》:“枯藤老树昏鸦，小桥流水人家，古道西风瘦马，夕阳西下，断肠人在天涯。”同样表达了间断的文学意境。

[评注 2] 1900 年 12 月，德国物理学家马克斯·普朗克（Max Planck，1858—1947）因其大胆的假设而震撼了科学界：辐射能（也就是光波能）并不是以连续流的形式辐射的，而是由他称之为“量子”的粒子一小团或一小块地辐射的。普朗克的假设是同光和电磁波的经典理论相矛盾的。普朗克的假设标志着量子力学的诞生。

[例 1-5-1] 判断间断点的类型，如图 1.5.1 所示。

$x_0=0$ 是函数 $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的可取型间断点，属于第一类间断点；而 $x_0=0$ 是函数 $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的振荡型间断点，第二类间断点。

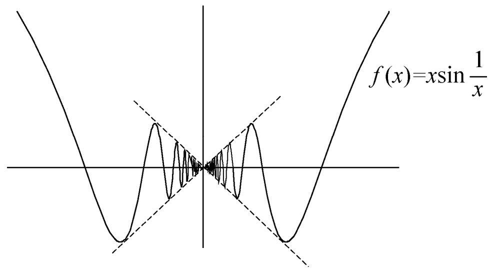


图 1.5.1　$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的图象

[例 1-5-2] 问 a 为何值时，函数 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处连续？

答案：$a=0$。

$$f(x)=\begin{cases} a+x, & x\geq 0 \\ x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x<0 \end{cases}$$

1.5.2　连续函数的局部形态

1．初等函数的连续性

定理 1.5.1：初等函数在其定义区间内均连续。

[评注] 初等函数在其定义域内必连续，对吗？

[反例] $f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$ 的定义域是 $\{x:x=n\pi，n=0、\pm1、\pm2、\cdots\}$ 应改为初等函数在其定义区间内必连续。

[例 1-5-3] 证明 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的。

[提示] $|\sin(x+\Delta x)-\sin x|=|2\sin(\dfrac{\Delta x}{2})\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})|\leq|2\sin(\dfrac{\Delta x}{2})|\leq|\Delta x|$。

[例 1-5-4] 有理分式函数 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\right]=F(x_0)$（只要 $Q_m(x_0)\neq 0$）。

[评注 1] $P_n(x)$ 与 $Q_m(x)$ 分别是 n 次和 m 次多项式。

[评注 2] 思考：何时 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$？

2．复合函数的连续性

$\lim\limits_{x\to x_0}f[\phi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)]=f(a)$ 何时成立？

答案：当 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续是，$\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a$。

定理 1.5.2 :设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而 $y=f(x)$ 在 $u=a$ 处连续，$u=\varphi(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)$。

证明：$y=f(u)$ 在 $u=a$ 处连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'>0$，当 $|u-a|<\delta$ 时，$|f(u)-f(a)|<\varepsilon$ 成立，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，所以对以上的 $\delta'>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(u)-f(a)|=|f(\varphi(x))-f(a)|<\varepsilon$，因此，$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$。

[例 1-5-5] 证明：$\ln(1+x)\sim x\quad(x\to0)$，即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$。

[例 1-5-6] 极限的幂指运算法则：

若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b>0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b$。

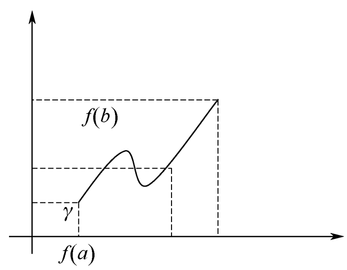


图 1.5.2　闭区间 $[a,b]$ 上的连续曲线

1.5.3　连续函数整体性态

由于实直线上的闭区间具有良好的性能，因此诱发出闭区间上的连续函数具有许多优美的整体特性。闭区间上连续函数整体性质的研究，有助于体验如何从局部过渡到整体的数学思想方法。

1．研究连续函数整体性态的数学工具

定理 1.5.3 闭区间套定理 :设 $\left\{[a_n,b_n]\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是闭区间套（即 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，$n=1$、2、⋯），且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则存在一个唯一的实数 c，使得

$$a_n\le c\le b_n,\ \ n=1、2、\ldots$$

定理 1.5.4 有限覆盖定理 :若开区间族 $H=\left\{(\alpha,\beta)\mid\left\{(\alpha,\beta)\subset R\right\}\right\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的覆盖（即 $[a,b]\subset\bigcap_{(\alpha,\beta)\in H}(\alpha,\beta)\Leftrightarrow\forall x\in[a,b]$，$\exists(\alpha,\beta)\in H$，使得 $x\in(\alpha,\beta)$），则必可从 H 中挑选出有限个区间 $\left\{(\alpha_i,\beta_i)\right\}_{i=1}^{n}$ 覆盖 $[a,b]$。

定理 1.5.5 确界存在定理：R 的任意非空有上界的子集 D 在 R 上中有上确界：$M=\sup D$。

（1）M 是集合 D 的一个上界，即 $x\le M$，$\forall x\in D$。

（2） M 是集合 D 的最小上界：任何小于 M 的实数 M'，都不再是集合 **D** 的上界，即 $\forall M' < M$，$\exists x' \in D\,(x' > M')$。

[评注] 闭区间套定理与柯西准则一样，最早由捷克数学家、一个受经院哲学教育的天主教牧师的伯恩哈德 · 波尔查诺（Bernard Bolzano，1781—1848）首先提出并使用，但没有用数学理论证明其正确性。柯西认为区间套定理是理所当然的，实际上与柯西准则等价。区间套定理最终由康托尔的基本序列理论加以严格证明。

有限覆盖定理最早由德国数学家海涅（Heine，1821—1881）及法国数学家波雷尔（Borel，1871—1956）首先提出，后经实变函数论奠基人法国数学家勒贝格（Lebesgue，1875—1941）加以完善并推广。有限覆盖定理是真正能把“无限”转化为“有限”的数学工具之一。人世间的欲望有千千万种，有限覆盖定理告诉我们，不论我们的人生有多长，真正能得以实现的欲望始终是有限的，因此在利益面前我们应该看得淡、放得下。

从理论上说，从确界存在定理、闭区间套定理及有限覆盖定理中任意一个做工具都能证明关于闭区间上的连续函数的所有整体性态，然而，在不同的场合下使用不同的定理却有繁简之分。

2．一致连续性

定义 1.5.2：设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 x_1、$x_2 \in I$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

[评注]在历史上，许多数学家包括分析学大师柯西都曾经把“连续”与“一致连续”混为一谈。德国数学家海涅区分了函数的连续性与一致连续性，并用有限覆盖定理证明了闭区间上的连续函数必一致连续。函数的一致连续性是整体概念，几何直观可解释为“自变量很接近，函数值同步很接近，而且接近的程度不受自变量所处位置的影响”。函数一致连续性对研究函数可积性及误差整体估计理论是有益的。

3．闭区间上连续函数的性质

请学生任意画出一条闭区间 $[a,b]$ 上连续曲线 $y = f(x)$，记为 $f(x) \in C[a,b]$，研究其性质，结论如下。

（1）**整体有界性定理**：若 $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

（2）**最值存在定理**：若 $f(x) \in C[a,b]$，则 $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ 与 $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ 都存在。

（3）**零点存在定理**：如图 1.5.3 所示，若 $f(x) \in C[a,b]$，且 $f(a)f(b) < 0$，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = 0$。

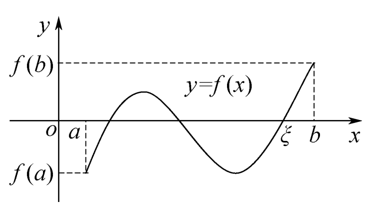


图 1.5.3　零点存在定理

（4）**介值定理**：若 $f(x) \in C[a,b]$，且 $f(a) = A \neq B = f(b)$，则 $\forall A \le C \le B$，至少存在一点 ζ，使得 $f(\zeta) = C$。

（5）**康托尔定理**：若 $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

[评注] 最值定理由魏尔斯特拉斯在 1860 年给出，在此之前柯西在证明多项式根的存在

性定理时已经不加证明地引用过。康托尔定理由海涅（Heine，1797—1856）在 1872 年提出并证明，稍后康托尔将其一般化，并用区间套的方法重新给出证明。在日常生活中，有时侯看问题的观点处于完全对立的状态，零点存在定理告诉我们，只要双方心灵相通（连续），总能找到解决问题的关键点（零点）。

[例 1-5-7]证明：实系数奇次代数方程至少有一个实根。

[提示] 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_nx+a_n$, $(a_0>0$，n 为奇数)，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，因此，对 $M>0$，$\exists x_1>0$，当 $x<x_1$ 时，$f(x)<-M<0$，$\exists x_2>0$，当 $x>x_2$ 时，$f(x)>M>0$。

1.5.4　问题探究：以美启智

[例 1-5-8]设 $y=f(x)$ 是集合 E 到 D 中的一个对一的连续映射。问集合 D 到集合 E 的逆映射是否一定连续？若正确，请给予证明，否则，请给出一个反例。

首先做映射：在实轴上做一数集 $E=[0,2\pi]$，在 xoy 坐标面上做以原点 o 为圆心，半径为 1 的圆周，令 $f(x)=M$ （逆映射设为 $x=\psi(M)$，$x\in[0,2\pi]$），每一点 x 与圆周上这样的点 M 对应：它的半径向量与 ox 轴的正向所构成的角刚好是 x 弧度。显然，$M=f(x)$ 是连续的且一一对应，但逆映射 $x=\psi(M)$ 就在 $x=0$ 相对应的 M_0 处不连续：$\lim\limits_{M\to M_0+0}\varphi(M)\neq\lim\limits_{M\to M_0-0}\varphi(M)$　。

[例 1-5-9]单调函数与极值。x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，则必存在 x_0 的某个邻域，此邻域内，在 x_0 的左侧，$f(x)$ 单调增加，在 x_0 的右侧，$f(x)$ 单调减少。增减区间的分界点必是极值点。

[反例] $f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 2，x=0\end{cases}$，

取 $x=\dfrac{1}{2k\pi+\pi/2}$，$k=1，2,\cdots$，$f'(x)<0$ ；

取 $x=\dfrac{1}{2k\pi}$，$k=1，2,\cdots$，$f'(x)>0$。

[例 1-5-10]　$f(x)=2^x-1-x^2$ 在实数轴上有多少个根？

答案：三个根。$f(0)=f(1)=f(x_0)=0$，$x_0>1$，$f(4)<0$，$f(5)>0$，则 $f^{(3)}(x)=(\lg 2)^3 2^x\neq 0$。

[例 1-5-11] 试证方程 $x=a\sin x+b$，$a>0$，$b>0$，至少有一个不超过 $a+b$ 的正根。

[方法 1]分别作出 $y=a\sin x+b$ 与 $y=x$ 的图象，可以发现其交点不超过 $a+b$，且 $x=a+b=\dfrac{\pi}{2}$ 也是该方程的一个根。

[方法 2] 用介值定理，令 $f(x)=a\sin x+b-x$，则

$$f(0)=b，f(a+b)=a\sin(a+b)-a\leq 0$$

[例 1-5-12] 利用极限和连续求函数 $f(x)$ 表达式。设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且对于任意 x，$y\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 成立，求 $f(x)$。

解：令 $y=0$，则有 $f(x)=f(x)+f(0)$，$f(0)=0$。

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(x+\Delta x)-f(x)]=0$。

所以 $f(x)$ 在 x 处连续，由 x 的任意性知，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

又因为 $\lim\limits_{y\to x} f(x+y) = \lim\limits_{y\to x}[f(x)+f(y)]$，

所以 $f(2x) = 2f(x)$，归纳得 $f(nx) = nf(x)$。

令 $x = \dfrac{1}{n}$，则有 $f(1) = nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}f(1)$。

对任意有理数 r，均有 $f(r) = rf(1)$，对任意无理数 α，取有理数列 $\{r_n\}$，使 $r_n \to \alpha$，就有 $f(r_n) = r_n f(1)$，由 $f(x)$ 的连续性，知 $f(x) = xf(1)$。

[评注] 若题目改为 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 且 $f'(x) = 1$，则由导数的定义得 $f(x) = \mathrm{e}^x$。

第 2 章　导数与微分

有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也立刻成为必要的了……

——[德]恩格斯（Engels，1820—1895）/马克思主义创始人之一

文学的最高境界，是美的境界，而数学也具有诗歌和散文的内在气质，达到一定境界后，也能体会和享受数学之美。

——丘成桐（Shing-Tung Yau，1949—）/美籍华裔数学家、菲尔兹奖得主

§2.1　导数与微分：心灵思考入微的思想显微镜

内容提要：

微积分是探求不断变化的社会与自然现象的重要数学工具，它包含着同一个硬币的两面：微分与积分。微分与积分，用一句通俗的话说，将一个苹果切成许多细块就是微分，而把切成小块的苹果重新合拢起来就是积分。历经多年琢磨与砥砺，历史已经证明了这门学问对于整个科学领域来说是无价之宝。

恩格斯说：“高等数学主要基础之一是这样一个矛盾，在一定条件下，直线与曲线应当是一回事。”直曲转化是一种数学思想，将这种思想实施在具体问题中是有条件的，必须实行等价无穷小代换。

微分学研究函数的导数与微分及其在函数研究中的应用，建立微积分学所用的分析方法对整个数学的发展发生了深刻的影响，渗透到自然科学众多的领域，微分学有作用是在自然科学中用数学表示不仅仅表示状态，也表明过程。基本思想在于考虑函数在小范围是否可能用线形函数或多项式函数来近似表示。直观上看来，对于能够用线性函数任意近似表示的函数，其图形上任意微小的一段都近似于一段直线。在这样的曲线上，任意一点处都存在一条唯一确定的直线（切线）。它在该点处相当小的范围内，可以与曲线密合得难以区分，主要研究以下内容：瞬时速度、切线方向、导数定义及微分法则。

微分学的主要研究方法是“局部分析法”，极限是它的研究工具。微分源于速度问题。

微分与导数是微分学两个紧密联系的核心概念，它们源自对曲线的切线、函数的极值及物体运动的速度的研究。函数的微分就是函数增量的线性（主要）部分，而导数表示函数的变化率。微分开辟了通向无穷小的道路：微分（无限细分）就像锋利无比的屠龙宝刀，削去不影响事物本质的多余部分，帮助人们“看见”以其他方法无法看到的现象。

美在过程：虽然积分概念早在古代就已经打下基础，但微积分的另一个基本概念——导数，即一个变量随某个变量变化时的变化率，则是在 17 世纪才由费马及其他人建立起来的。由于牛顿和莱布尼茨发现了这两个表面上是相反的概念之间的内在联系，从而使数学科学开始了空

前的发展。

积分的出现在 17 世纪后半叶，一直到 1817 年，导数的严格定义才给出，这中间跨越了一百多年的历史。在这一百多年间，微积分一直在用。尽管一直在用，它在数学上严格的定义还没有给出，但实践证明了微积分的有效性。现在用的导数定义是捷克数学家、哲学家波尔查诺在 1817 年给出的。

在数学基本概念的教学中，充分利用几何直观性，能更具体生动地理解其含义，而使学生留下深刻的印象。微分思想的精髓是“局部线性化”，或者说“局部地以直代曲”（局部地用切线代替曲线）、“抓主要矛盾”的哲学思想。导数既可看做斜率，也可看做极限。

2.1.1　数学的抽象性使它具有高度的概括性

1．“1”的联想

（1）$\sin^2 x+\cos^2 x=1$；　　（2）单位圆半径；

（3）$\log_{10}^{10}=1$；　　（4）单位矩阵；

（5）歌德巴赫猜想，即$1+1$；　　（6）真命题；

（7）角谷猜想，即$\dfrac{3n+1}{2^k}$；　　（8）接通；

（9）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；　　（9）信息量 1 比特；

（11）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；　　（12）$\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1$。

2．抛物线 $y=\dfrac{1}{2}ax^2$ 的联想

（1）二次函数：$y=\dfrac{1}{2}ax^2$。　　（2）自由落体运动：$s=\dfrac{1}{2}gt^2$。

（2）运动物体的动能：$E=\dfrac{1}{2}mv^2$。　　（4）半圆的面积：$A=\dfrac{1}{2}b^2\tan\alpha$。

（5）一维谐振子的势能：$V=\dfrac{1}{2}Kx^2$。

3．请思考“导数的联想”。

（1）物体的瞬时速度；　　（2）切线的斜率；

（3）数的变化率；　　（4）电流的强度。

[评注] 我国自己培养的首批 18 名数学博士之一李尚志（1947—）教授曾说，数学的抽象就是“通过有招学无招，无招胜有招”：从复杂的不同事物中总结出共同的简单规律，再用来解决更多的复杂问题，这也是数学的神韵。再举一例，长期从事气象研究的美国科学家爱德华 · 洛伦茨（Edward Lorenz，1917—2008）以他非凡的抽象能力，将气象预报模型里的上百个参数和方程，简化到如下一个仅有 3 个变量 x、y、z 及 3 个系数 A、B、C 完全决定的微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}(y-x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{B}x-y-xz$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy-\mathrm{C}z$$

该方程组的解可以说明混沌现象奇妙无比。

2.1.2　导数思想：无穷小之比

最早时，费马为了解决极大、极小问题，引入了导数的思想，但与导数概念密切相关的是以下两个问题。

问题 1：已知运动规律，求运动的速度。

问题 2：已知曲线，求它的切线。

1．瞬时速度

设一个非匀速直线运动的质点所行的路程与时间 t 的依赖关系是

$$s = s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

考虑时刻 t 的一个临近值 t_1，在 t 到 t_1 这段时间 $\Delta t = t_1 - t$ 中，质点运动的路程是

$$\Delta s = f(t_1) - f(t)$$

从而这段路程上的平均速度为 $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，则时刻 t 的瞬时速度定义为

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_1) - f(t)}{\Delta t} = gt$$

2．切线方向

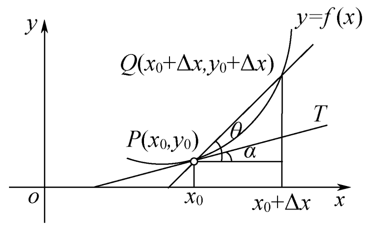


图 2.1.1　切线方向

如图 2.1.1 所示，如果 Q 趋近于 P，割线 PQ 趋近于某个极限位置 PT，则占据这个极限位置的 PT，就成为曲线在点 P 处的切线，此切线的方向就是运动质点在点 P 处的瞬时方向，则

$$\tan\theta = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\phi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2.1.3　导数与微分：差商的极限

1．导数

瞬时速度和切线方向两个问题涉及的运算是相同的。

第一步：从自变量 x 的变化量 Δx 出发，求出因变量 y 的变化量 Δy。

第二步：计算差商 $\Delta y / \Delta x$。

第三步：再令 Δx 趋向于零（而始终不为 0），取极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

这个极限运算称为函数的微分运算。

定义 2.1.1：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，$\forall x_0 \in I$。如果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\lim_{x \to x_0} \frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=f^{'}(x_0)$$

极限存在，又称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，并称 $f'(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 x 处的微分系数（或微分，或导数）。进一步的，称函数

$$F\left(\Delta x\right)=f'(x_0)\Delta x : R \to R$$

为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分，简记为

$$\mathrm{d}f(x_0)\left(\Delta x\right)=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)(x-x_0)$$

$\forall x \in I$，又称 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 是函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的微分函数。

[评注] 微分符号 df 中的“ d ”，其工作原理就像显微镜那样，它能澄清事物的本质；导数符号 f' 中的“ ' ”，就像一把精巧的手术刀，帮助我们削去事物非本质的部分。实际上，微分的“局部线性化”思想与哲学中让事物保持简单的“奥克姆剃刀（Occam's Razor）法则——“如无必要，勿增实体；无用的累赘，理当无情地剔除”是一脉相承的。

“以直代曲”的主要作用是透过现象看本质，舍去次要的东西，抓住事物的本质部分，“化不可见为可见”正是微分的强大功能。深受牛顿影响的英国浪漫诗人威廉 · 布莱克（William Blake，1757—1827）有诗云：“一沙一世界，一花一天堂。握无穷于掌心，窥永恒于一瞬。”这首诗相当富有微积分的味道，又相当有禅味。

定理 2.1.1：$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 存在常数 A 使得

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0)$$

[评注 1] 函数两小括号的差与分母相等且趋于零：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-f'(x_0)$$

[评注 2] $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的值，反映了函数 $y=f(x)$ $x=x_0$ 处的局部变化率：$\left|f'(x_0)\right|$ 大，表示变化激烈；$\left|f'(x_0)\right|$ 小，表示变化缓慢；$f'(x_0)=0$，表示变化稳定。

[评注 3] $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件是 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$。

这里 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{h \to -0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$。

[评注 4] 常数的导数为零，例如，$\{f(x_0)\}'=0$。

[评注 5] 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}f(x_0)\left(x-x\ \right)=f'(x_0)(x-x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的增量 $\Delta y(x_0)=f(x)-f(x_0)=f\left(x_0+\Delta x\right)-f(x_0)$ 的线性（主要）部分，而且有下述有限增量公式：

$$\Delta y(x_0)=\mathrm{d}f(x_0)(x-x_0)+o\left(x-x_0\right)\ \ (x \to x_0)$$

[评注 6] 微分的几何意义：微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M\left(x, f(x)\right)$ 处的切线上点的纵坐标相应于 Δx 的增量，如图 2.1.2 所示。

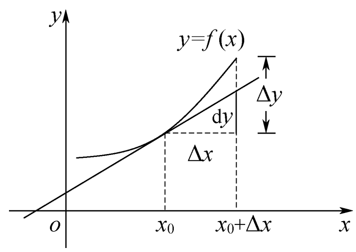


图 2.1.2　微分的几何意义

[评注 7] 导数的几何意义：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $p_0(x_0,f(x_0))$ 的切线存在，斜率为 $f'(x_0)$。

[评注 8] 微分之比，“局部”为本。函数的导数就是函数的微分与自变量的微分之商，即 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

我们明白：如果把函数图象的各点处的切线斜率都求出来，再观察切线斜率的变化，就能知道函数的性质（包括单调性、极大极小值点等），这将是别开生面的创新。

[例 2-1-1] $f(x)=\log_a^x$ ($x>0$)，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$。

[提示] $\left(\log_a^x\right)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a^{(x+h)}-\log_a^x}{h}=\dfrac{1}{x}\log_a^{\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)}=\dfrac{1}{x}\log_a^{\mathrm{e}}$。

[评注] 特别的，取 $a=\mathrm{e}$，得到 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$。

[例 2-1-2] $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$（n 为正整数，$x>0$），则 $f'(x)=\dfrac{1}{n}x^{\frac{n-1}{n}}$。

[评注] 可以证明：对任何非零实数 α，$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$。

[提示] 记 $\Delta y=\left(x+\Delta x\right)^\alpha-x^\alpha$，则 $y+\Delta y=\left(x+\Delta x\right)^\alpha$，两边取对数得

$$\ln\left(y+\Delta y\right)=\alpha\ln\left(x+\Delta x\right)\tag{2.1.1}$$

由 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ 知

$$\ln\left(x+\Delta x\right)=\ln x+\frac{1}{x}\Delta x+\theta_1\Delta x\tag{2.1.2}$$

其中，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\theta_1\to 0$，有

$$\ln\left(y+\Delta y\right)=\ln y+\frac{1}{y}\Delta y+\theta_2\Delta y\tag{2.1.3}$$

其中，当 $\Delta y\to 0$ 时，$\theta_2\to 0$。

由于 $\Delta x\to 0\Rightarrow\Delta y\to 0$，因此 $\Delta x\to 0$，θ_1 与 θ_2 都趋于 0。

将式（2.1.2）和式（2.1.3）代入式（2.1.1）得

$$\ln y+\frac{1}{y}\Delta y+\theta_2\Delta y=\alpha\ln x+\frac{\alpha}{x}\Delta x+\alpha\theta_1\Delta x$$

由于 $y=x^\alpha$，于是得

$$\left(\frac{1}{y}+\theta_2\right)\Delta y=\alpha\left(\frac{1}{x}+\theta_1\right)\Delta x\,,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\alpha\left(\frac{1}{x}+\theta_1\right)}{\frac{1}{y}+\theta_2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\alpha\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}}=\alpha x^{\alpha-1}$$

[例 2-1-3] $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$。

解：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x\to x+\Delta x$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x\\&=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\end{aligned}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

[例 2-1-4] 求下列各函数在指定点处的导数。

(1) $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，$f'(1)$。

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ =2，求 $f'(1)$。

答案：$f'(1)=-99!$；$f'(1)=2$。

[评注] 美在过程：含有抽象记号，仅知其连续，但不知其是否可导，必须用导数定义来求。

2．一阶微分形式不变性

设 $y=f(u)$，则 $\mathrm{d}y=f'(u)\Delta u$，即不论 u 是自变量还是因变量，此公式均对。

[例 2-1-5] 设 $y=\sin(x^2)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)}$。

方法 1：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)}=\dfrac{\cos(x^2)\cdot 2x}{(3x^2)}$。

方法 2：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)}=\dfrac{\mathrm{d}\sin\left[\left(x^3\right)^{2/3}\right]}{\mathrm{d}(x^3)}\ =\ \cos\left[\left(x^3\right)^{\frac{2}{3}}\right]\cdot\dfrac{2}{3}\cdot(x^3)^{-\frac{1}{3}}$。

3．基本初等函数的求导公式（请熟记）

[例 2-1-6] 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，试求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}f\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

答案：$\sqrt{2}$。

[提示] $f'(0)=\cos 0=1$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=1$，即 $f(h)\sim h\quad(h\to 0)$。

[评注 1] 切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$。

法线方程：$y-y_0=\dfrac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

[评注 2] 规定：两条曲线的夹角就是两条曲线在该点处切线的夹角（取锐角），如图 2.1.3 所示。

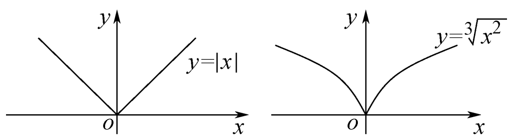


图 2.1.3　$y=|x|$ 和 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的图形

2.1.4　微分的应用：近似计算

$$f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0)$$

[例 2-1-7] 当 $|x|$ 很小时，以下各式成立。

（1） $\sin x\approx x$， $\tan x\approx x$， (x 是弧度)。

（2） $\mathrm{e}^x\approx 1+x$， $\ln(1+x)\approx x$。

[评注] 误差估计：设 δ_x 是 x 的最大绝对误差，即 $|\Delta x|\leqslant\delta_x$，则 $\delta_y=|f'(x)|\cdot\delta_x$，而 y 的最大相对误差为 $\dfrac{\delta_y}{|y|}$。

[例 2-1-8] 计算 $\sqrt[3]{1729.03}$ 的近似值。

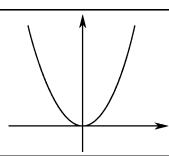
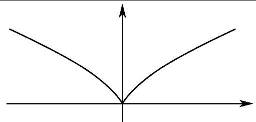
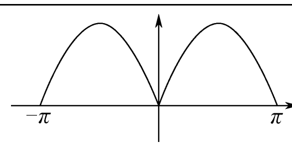
[提示] 利用 $(1+x)^{\frac{1}{n}}\approx 1+\dfrac{x}{n}$，并且注意到 1 立方尺等于 1728 立方英寸，即 $12^3=1728$，因此，$\sqrt[3]{1729.03}\approx 12\sqrt[3]{1+\dfrac{1.03}{1728}}\approx 12\left(1+\dfrac{1.03}{3\times 1728}\right)\approx 12.002$。

[评注] 里约热内卢的一个下午，诺贝尔奖得主、物理学家理查德 · 费曼（Richard Feynman, 1918—1988）正在他喜欢的一家餐馆用餐，算盘推销员向他发起挑战，看谁计算“立方根”更快，他们选定了 1729.03 这个数字，几秒之内费曼就写出了答案 12.002，那位算盘推销员惨败给了纯粹的思维。

印度数学家拉马努金（Ramanujan，1887—1920）整数分拆方面的小故事：由于拉马努金病重，三一学院院士哈代（Hardy，1877—1947）前往探望。哈代说：“我乘出租车来，车牌号码是 1729，很平淡的一个数字，但愿不会是不祥之兆。”拉马努金回答道：“不，那是个很有趣的数字。可以用两个立方和来表达，此种表达方式的数字中，1729 是最小的。”即 $1729=1^3+12^3=9^3+10^3$。

可导数与连续的关系如表 2.1.1 所示。

表 2.1.1　可导数与连续的关系（可导必连续；但连续不一定可导）

函数	$y=2ax^2$	$y=\sqrt[3]{x}$	$y=\lvert\sin x\rvert$
图形			

续表

函数	$y=2ax^2$	$y=\sqrt[3]{x}$	$y=\|\sin x\|$
$x=0$ 处的切线	x 轴 （$y=0$）	y 轴 （$x=0$）	不存在
$x=0$ 处的导数	$f'(0)=0$	$f'(0)=\infty$	$f_+'(0)=1$ $f_-'(0)=-1$
$x=0$ 处连续性	连续	连续	连续
$x=0$ 处光滑性	光滑	不光滑	不光滑
总结 ① 切线存在必可导：左导等于右导，但切线存在不一定可导 ② 偶函数 $x=0$ 处的切线水平 ③ 切线就是割线的极限位置			

2.1.5 问题探究：美在运动

[例 2-1-9] 已知

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{2}{x}}+e^{-\frac{x}{2}}+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x<0 \\ ax+b, & x\geq 0 \end{cases}$$

为使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，应如何选取参数 a 和 b？

答案：$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=1$。

[评注] 分段函数的交界点处的导数必须用导数定义来求。

[例 2-1-10] 已知

$$f(x)=\begin{cases} x^k\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

问 k 满足什么条件时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？可导？导数连续?

答案：$k>0$，$k>1$，$k>2$。

[例 2-1-11] 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且 $|f(x)|\leq|\sin x|$。

求证：$|a_1+2a_2+\cdots na_n|\leq 1$（第 28 届普特南数学竞赛试题，1967 年 12 月 2 日）。

[提示] $f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$，$f(0)=0$。

$$|a_1+2a_2+\cdots na_n|=|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\leq 1$$

[例 2-1-12] 构造处处连续但处处不可导的例子。1930 年，哥廷根代数学派传人荷兰数学家范德瓦尔登（Bartel Leendert van der Waerden，1905—1996）的做法：由 $y=|x|$ 在 $x=0$ 点处不可微出发，不断压缩“锯齿”时，得到越来越多的不可微点，即假设

（1）$s_1(x)=|x|$，$|x|\leq\dfrac{1}{2}$，且满足 $s_1(x+k)=s_1(x)$，k 为整数；当 $n>1$ 时定义，

$s_n(x)=4^{-n}s_1(4^n x)$ 为周期是 4^{-n} 的周期函数，其极大值为 $\frac{1}{2}\cdot 4^{-n}$。

（2） $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}s_i(x)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$ 任意一点 x 连续，但在任意一点 c 不可微。

[证明提示] $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}s_i(x)$，$x\in\mathbf{R}$ 的右端的函数级数具有优级数

$$\sum_{k==0}^{+\infty}\frac{1}{2\cdot 4^k}$$

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续。下面来证明函数 $f(x)$ 处处不可微。设 c 是 $\mathbf{R}$ 中任意一点。对任意的整数 n，可以确定整数 m_n，使得

$$m_n\leq 2\cdot 4^{n-1}\cdot c\leq m_n+1$$

也就是

$$\frac{m_n}{2\cdot 4^{n-1}}\leq c\leq\frac{m_n+1}{2\cdot 4^{n-1}}$$

对于任意的整数 n，在区间

$$I_n=\left[\frac{m_n}{2\cdot 4^{n-1}},\frac{m_n+1}{2\cdot 4^{n-1}}\right)$$

之中，存在这样的点 x_n，它与点 c 的距离等于区间 I_n 长度的一半，即使得

$$|x_n-c|=\frac{1}{4^n}$$

考察差商

$$\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{s_k(x_n)-s_k(c)}{x_n-c}$$

对于 $k\geq n$，函数 $s_k(x)$ 的周期 $\frac{1}{4^k}$ 能够整除 $|x_n-c|=\frac{1}{4^n}$，因而

$$\frac{s_k(x_n)-s_k(c)}{x_n-c}=0$$

对于 $k\leq n-1$，函数 $s_k(x)$ 在区间 $I_k\supset I_n$ 上的斜率为 ±1。于是有

$$\frac{s_k(x_n)-s_k(c)}{x_n-c}=\pm1$$

我们看到

$$\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}=\sum_{k=0}^{n-1}(\pm1)$$

上式右端与 n 有同样的奇偶性，因而当 $n\to\infty$ 时不可能有极限。由此可知：函数 $f(x)$ 在任意一点 c 不可微[①]。

[评注 1] 直观上，$s_n(x)$ 是一振幅越来越小而频率越来越大的折线波。

[评注 2] 魏尔斯特拉斯大约于 1861 年构造了一个著名的处处不可微的连续函数（见

① 张筑生．数学分析新讲（第三册）．北京：北京大学出版社，1995．

§1.2） $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right)$ $\left(0<a<1,\ ab>1+\frac{3}{2}\pi,\ b\text{是奇数}\right)$。实际上，哈代已经证明了[①]，如果把不可微理解为不存在有穷导数，则条件 $0<a<1$，$ab>1$ 就够了；若不限于有穷导数，要保证不可微性，上述条件就不够了，上面公式除要求 $0<a<1$ 外，还要求 b 是奇数，$ab>1+\frac{3\pi}{2}$，其优点是可以使用初等方法证明。

[评注 3] 1861 年黎曼在演讲中给出了用无穷级数表示的函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n^2\pi x\right)}{n^2}$$

它处处连续，但无处可微分（后者于 1916 年被哈代证明）。

[例 2-1-13] 导数的光学应用。证明旋转抛物面（设抛物线 $y=\frac{1}{2}px^2$ 绕它的对称轴 $y=0$ 旋转而成的曲面）的光学性质：放在焦点 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ 处的光源所发出的光，经旋转抛物面各点反射后成为平行光束。

解：如图 2.1.4 所示，切线 TS： $y=y_0+px_0\left(x-x_0\right)$，

$S\left(x_1,y_1\right)$，令 $x_1=0$， $y_1=y_0-px_0^2=-\frac{1}{2}px_0^2$，

只需证明 $\angle FMS=\angle FSM$。

事实上， $FS=\frac{p}{2}+\frac{1}{2}px_0^2$，

$MF=\sqrt{(x_0-0)^2+\left(\frac{1}{2}px_0^2-\frac{p}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}px_0^2+\frac{p}{2}=FS$。

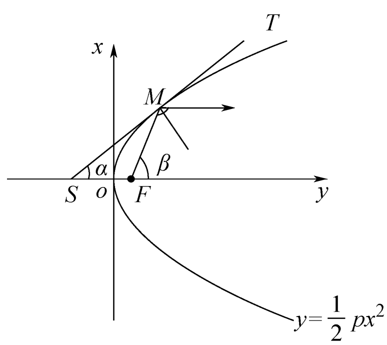


图 2.1.4　抛物线 $y=\frac{1}{2}px^2$

[例 2-1-14] 在西方广为流传的一本数学科普著作《为百万人的数学》（作者 Lancelot Hogben）中是这样叙述导数的：

如果在一条曲线上运动的两点 p、q 不断靠拢，使得很难区分两点是沿着原曲线还是沿着直线段 pq 彼此靠近的，这时，尽管 p、q 的坐标 x 有十分微小的差别，但测速仪上的指针几乎是不动的。直线段 pq 的斜率即为测速仪上的读数。

① Transactions of the American Mathematical Sö ciety,1916（17）：301—325.

利用傅里叶变换，可把带导数的微分方程转换为不带导数的代数方程，关键点之一是因为指数函数微分的奇妙性质：指数函数的导数等于这个函数自身乘以一个常数。

恩格斯曾说："傅里叶是一首数学的诗，黑格尔是一首辩证法的诗。"傅里叶有句名言："对自然界的深入研究乃是数学最富饶成果的源泉。"

精其选，解其言，知其意，明其理。

——冯友兰（1895—1990）/中国哲学家

最简单的解释是最佳的。

——奥卡姆的威廉（William of Occam，1287—1347）/英国哲学家

§ 2.2　微分法则：以少为美

内容提要：

直到现在，我们所做的各种函数的微分，都是先将差商变形，再取极限。经过牛顿和莱布尼茨以及他们的后继者的工作，这些处理个别问题的技巧，被有效的一般的方法所取代，而这正是具有决定意义的一步。只要掌握了少数几条简单的法则，以及知道这些法则如何应用，就能用这些方法几乎毫不费力地微分数学中经常出现的各种函数。微分法则表明，初等函数的导数仍然是初等函数。

微分学的基础是建立在实数、函数、极限、连续性等一组基本概念之上的。微分学主要研究导数、微分、微分中值定理等内容。而借助微分法则，可以成功解决初等函数的微分运算等问题。

以少为美：真理愈是朴素就愈加简洁，简洁本身就是一种美。数学之所以用途如此之广泛，盖因数学的特点在于它的简洁。数学家莫德尔（Mordell，1888—1972）说："在数学美的各个属性中，首先要推崇的大概是简单性。"也如牛顿所说："寻求自然事物的原因，不得超出真实且足以解释其现象者……因为自然喜欢简单。"

基本初等函数微分公式的推导可利用微分定义、微分法的基本法则及两个重要极限。关于求导法则，可以利用顺口溜形象直观地去记忆：

指数求导形不变，对数求导变负幂；
常幂求导幂降一，幂指求导要爬肩；
带弦求导身份改，带余求导符号变；
切割求导紧相连，反三求导类改变。

2.2.1　求导复习

一般求导须遵循如下三个步骤：如图 2.2.1 所示，从自变量 x 的变化量 Δx 出发，求出因变量 y 的变化量 Δy；计算商 $\Delta y/\Delta x$；再令 Δx 趋向零(而始终不为 0)，取极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。

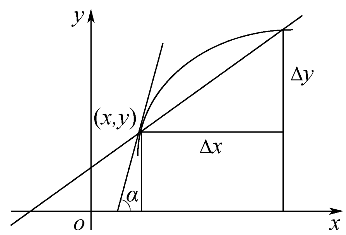


图 2.2.1 求导示意图

2.2.2 微分的四则法则

定理 2.2.1：设 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都是可微函数，则它的和、差、积、商仍为可微函数，并且 $(u\times v)'=u'\pm v'$，$(uv)'=u'v+uv'$，$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{(u'\cdot v-u\cdot v')}{v^2}$，$(v\neq 0)$。

[例 2-2-1] $\{f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)\}'=?$

$f_1'(x)f_2(x)\dots f_n(x)+f_1(x)f_2'(x)\dots f_n(x)+\cdots+f_1(x)f_2(x)\dots f_n'(x)$。

[例 2-2-2] $y=2x^3-5\sqrt{x}+\sec x$,

答案：$y'=6x^2-\dfrac{5}{2\sqrt{x}}-\sec x\tan x$。

[例 2-2-3] $y=\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)+\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$，$y'=?$

[提示] $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$；$(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$。

答案：$y'=2\mathrm{e}^x\cos x+\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$。

2.2.3 复合函数求导法则

定理 2.2.2：设 $y=(u)$，$u=\varphi(x)$ 都是可微函数，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 也可微，并且 $\{f(\varphi(x))\}'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$。

[提示] 利用导数的第二个定义求导。

[评注] 复合函数的微分法的本质就是将复杂的事项分解为简单的事项，其实，这也是我们日常生活处理事情的基本原则之一。先按复合函数的求导法则按部就班地做大量习题，最后省掉中间步骤，一气呵成。

[例 2-2-4]（1）$y=\sin(x^2)$，$y'=2x\cos(x^2)$；（2）$y=\sin(2x)$，$y'=2\cos(2x)$；（3）$y=\sin^2x$，$y'=2\sin x\cos x$；（4）$y=2^{\sin x}$，$y'=2^{\sin x}\ln 2\cdot\cos x$。

[例 2-2-5] $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y'。

解：$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

[评注] 用凑微分法求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$（见 4.2.1）。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C\text{。}$$

[例 2-2-6] 若

$$g(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}f[g(x)]}{\mathrm{d}x}\mid x=0$。

解：$f'[g(x)]\cdot g'(x)|_{x=0}=f'[g(0)]\cdot g'(0)=0$，其中

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

2.2.4　反函数的导数

定理 2.2.3：设 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 互为反函数，如图 2.2.2 所示，则其中一个可微时，另一个也可微，并且 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$　$(f(x)\neq 0)$。

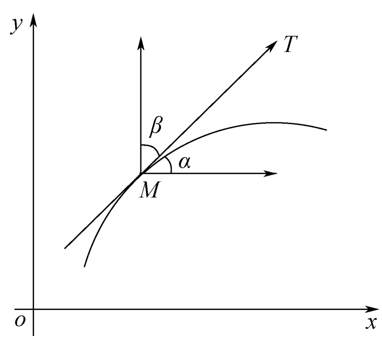


图 2.2.2　反函数求导示意图

[评注] 反函数的导数的几何意义：设原函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 Y 上连续，严格上升，则 $\varphi(y)$ 的值域 X 也是区间，反函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上连续，严格上升，且 $\varphi'(y_0)=\mathrm{tg}\alpha$，$f'(x_0)=\mathrm{tg}\beta$，由 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，得 $\varphi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$。注意 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1$。

[例 2-2-7]　$y=\arctan(x)$，$y'=\dfrac{1}{(\tan y)'}=\cos^2 y=\dfrac{1}{1+x^2}$；$y=\arcsin x$，$y'=\dfrac{1}{(\sin y)'}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

[例 2-2-8]　$y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\left(\dfrac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)$，求 y'。

解：$y'=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(1-\left(\dfrac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)'$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a+b\sin x}{\sqrt{a^2-b^2}\cos x}\cdot\frac{a\cos x(a+b\sin x)-(a\sin x+b)b\cos x}{(a+b\sin x)^2}$$
$$=\frac{1}{a+b\sin x}。$$

2.2.5　高阶导数

加速度：设一个非匀速直线运动的质点所行的路程与时间t的依赖关系是$s=f(t)$，在时刻t的瞬时速度为$v=f'(t)$。

若任意两个相同的时间间隔其速度的变化也相同，则称为等加速度运动，单位时间内速度的改变值就是加速度的值。若质点做非匀速运动，为了刻画加速度的概念，引入了二阶导数的概念：$\alpha(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=f''(t)=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

设$y=f(x)$，$f^{(n)}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^x}=\dfrac{\mathrm{d}y^{(n-1)}}{\mathrm{d}x}$，规定：$f^{(0)}(x)=f(x)$。

[例 2-2-9]　设$y=x^a$，则$y^{(n)}=a(a-1)...(a-n+1)x^{a-n}$

[评注] 若y是m次多项式，即$y=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$，则

$$y^{(n)}=\begin{cases}0，\ n>m\\ m!a_m，\ n=m\\ m(m-1)...(m-n+1)a_mx^{m-n}，\ n<m\end{cases}$$

[例 2-2-10]　$y=\sin x+\ln(1+x)$，$y^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$。

2.2.6　莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{i=n}C_n^iu^{(n-i)}v^{(i)}$$

[评注] 类比之美：由类比把已知的结论推广到另一个领域。牛顿 1676 年 10 月在给英国皇家学会的一封信中曾把二项式展开

$$(a+b)^n=C_n^0a^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}a^{n-1}b^1+C_n^na^nb^0$$

拓展到有理数指数的情形，展开式

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots$$

对一切实数α均成立。

在函数微分中，我们遇到了求两个函数乘积的高阶导数的莱布尼茨公式（1695 年）：

$$(uv)^{(n)}=C_n^0u^{(0)}v^{(n)}+C_n^1u^{(1)}v^{(n-1)}+\cdots+C_n^{n-1}u^{(n-1)}v^{(1)}+C_n^nu^{(n)}v^{(0)}$$

[例 2-2-11] 设$y=x^2\mathrm{e}^{2x}$，求$y^{(20)}$。

解：$y^{(20)}=\mathrm{e}^{20+2x}(x^2+20x+95)$。

[例 2-2-12] 设 n 次勒让德多项式为

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}$$

（1）试证：$P_n(1)=1$ ；$P_n(-1)=(-1)^n$ 。

（2）证明：$y=P_n(x)$，满足方程式

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-n(n+1)y=0$$

[提示] （1）令 $u=(x-1)^n$，$v=(x+1)^n$ 用莱布尼茨公式证明。

（2）令 $u=\frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$，

求导得 $u'=\frac{1}{2^n n!}\cdot 2nx(x^2-1)^{n-1}$ 或 $(x^2-1)u'-2nxu=0$，对此式两边同求 $n+1$ 阶导数即可。

[评注] 法国数学家勒让德在关于行星形状和球体引力的研究中，引进了著名的“勒让德多项式”。1823 年，他对费马大定理中 $n=5$ 的情形（即方程 $x^5+y^5=z^5$ 没有整数解）提出了一个完满的证明。

2.2.7　隐函数的导数

[例 2-2-13]　$y=(\sin x)^x$，求 y'。

解　两边取对数，得 $\ln y=x\ln\sin x$。

两边对 x 求导，得 $\frac{1}{y}y'=\ln\sin x+x\frac{\cos x}{\sin x}$，解出 $y'=(\ln\sin x+x\cot x)(\sin x)^x$。

[例 2-2-14] 可以证明：对任意给定的 x，有唯一的 y 满足

$$y-x-\varepsilon\sin y=o\quad(0<\varepsilon<1)$$

从而确定 y 是 x 的函数，并且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$，　$y''=\frac{-\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$。

2.2.8　参数方程求导公式

设参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$。

[例 2-2-15] 如图 2.2.3 所示，设摆线为 $\begin{cases}x=\varphi(t)=a(t-\sin t)\\y=\psi(t)=a(1-\cos t)\end{cases}$，求所确定函数的二阶导数，并求 $t=t_0$ 处的切线方程。

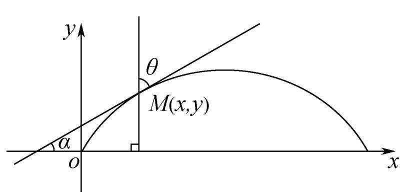


图 2.2.3　摆线

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\left(\frac{t}{2}\right)$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$，

$t=t_0$ 处的切线方为

$$y-a(1-\cos t_0)=-\frac{1}{a(1-\cos t_0)^2}(x-a(t_0-\sin t_0))$$

[评注 1] 首先有这样一条性质：若 $0<t<\pi$，则过摆线上任意一点 $M(x,y)$ 的切线和平行于 oy 轴的直线的夹角 θ 的正弦与点 M 的纵坐标的平方根之比为常数，即 $\frac{\sin\theta}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$。

提示：$\tan\theta=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}=\tan(\frac{t}{2})$，$\therefore\theta=\frac{t}{2}\quad(0<t<\pi)$。

[评注 2] 1696 年，瑞士数学家约翰 · 伯努利向欧洲数学家提出了一个挑战难题，那就是著名的最速降落轨道问题，1697 年复活节时，约翰共收到五份答案，分别来自约翰自己、牛顿、莱布尼茨、法国的洛必达侯爵，以及约翰的哥哥雅各布 · 伯努利。最速落径就是倒过来看的摆线，如图 2.2.3 所示。最速落径问题被视为数学史上第一个被仔细研究的变分问题，它导致了变分法的诞生，之后更是开辟出泛函分析这一崭新广阔的数学领域：变分之于泛函（函数的函数），相当于微分之于函数。

[评注 3] 摆线最原始的定义是指圆滚动时边沿一点的轨迹，后来发现最速落径是摆线后，约翰 · 伯努利还发现光在折射率与深度成正比的介质中的运动轨迹也是摆线。后来数学家对等时曲线问题加以研究时，得出的答案也是摆线。

2.2.9　数学符号的正确应用

[例 2-2-16] 设 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'}$，求证 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$。

证明：$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{y'})}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{y'})}{\mathrm{d}y'}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{(y')2}\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}$。

[提示] 将 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 看做商能使学生容易理解一些。

2.2.10　相关变化率

[例 2-2-17] 如图 2.2.4 所示，底角为 60°、底面半径为 a 的正圆锥形漏斗盛满了水，下接一底圆半径为 b（$b<a$）的圆柱水桶，问当漏斗水平面下降速度与水桶水平面上升速度相等时，漏斗中水平面的高度为多少?

解：在 t 时刻，漏斗中水平面高度为 h，水量为 v，水桶中水平面高度为 H，水量为 V，则

$$v=\frac{1}{3}\pi(\frac{h}{\sqrt{3}})^2h=\frac{1}{9}\pi h^3,\quad V=\pi b^2H$$

注：这两部分的水量和应是开始时漏斗盛满水的水量。

$$\frac{1}{9}\pi h^3+\pi b^2H=\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}a$$

即　$h^3+9b^2H=3\sqrt{3}a^3$。

对上式两边求导：

$$3h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+9b^2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$$

注意到$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$，故 $h^2=3b^2$。

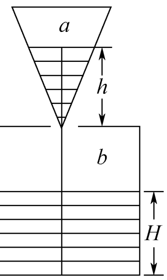


图 2.2.4　相关变化率

2.2.11　问题探索：运动之美

[例 2-2-18] 用数学归纳的方法证明等式：

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{(1-(n+1)x^n+nx^{n+1})}{(1-x)^2}$$

[提示] $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\left(x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right)'=\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)'$。

[例 2-2-19]设函数

$$g(x)=\begin{cases}2x-2,\ x<-1\\ Ax^3+Bx^2+Cx+D,\ |x|\le 1\\ 5x+7,\ x>1\end{cases}$$

试确定常数 A、B、C、D 的值，使 $f(x)$ 在（-∞，+∞）上可导。

答案：$A=-\frac{9}{4}$，$B=\frac{3}{4}$，$C=\frac{41}{4}$，$D=\frac{13}{4}$。

[例 2-2-20]设 $f(x)=\frac{1}{\sin(2x)}+\frac{1}{\sin(4x)}+\cdots+\frac{1}{\sin(2^n x)}$，求 $f'(x)$。

[提示]对一切 $n\in\mathbf{N}$，任意实数 $x\ne\frac{mx}{2^k}$，$k=0$，1，2，⋯，n，有

$$\frac{1}{\sin(2x)}+\frac{1}{\sin(4x)}+\cdots+\frac{1}{\sin(2^n x)}=\cot x-\cot(2^n x)$$

注意到$\frac{1}{\sin(2x)}=\cot x-\cot 2x$，

所以 $f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{2^n}{\sin^2\left(2^n x\right)}$。

[例 2-2-21]　$y=f^n[\varphi^n(\sin x^n)]$，求 y'。

解：$y'=n^3x^{n-1}\cos x^n f^{n-1}[\varphi^n\sin x^n]\varphi^{n-1}(\sin x^n)f'[\varphi^n(\sin x^n)]\varphi'(\sin x^n)$。

[例 2-2-22] 设 $y=(\frac{a}{b})^x\cdot(\frac{b}{x})^a\cdot(\frac{x}{a})^b$，$(a>0,\ b>0)$，求 y'。

[提示] 对数法：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\cdot(\ln(\frac{a}{b})-\frac{(a-b)}{x})$。

[例 2-2-23] 证明：切比雪夫多项式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)\quad(n=0，1，\cdots)$ 满足方程

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0,$$

[提示] $T_n(x)=\cos(n\theta)$，$x=\cos(\theta)$。

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)，\text{其中}\ T_0(x)=1，\ T_1(x)=x。$$

[评注 1] 切比雪夫（Chebyshev，1821—1894），俄国数学家、机械学家、彼得堡数学学派的创始人。在数论方面，切比雪夫从本质上推进了对素数分布问题的研究，1848 年，他探讨了素数分布的渐进规律：$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}$ （$\pi(x)$表示不超过 x 的素数个数），证明了不等式

$$0.92129\frac{x}{\ln x}<\pi(x)\leq 1.10555\frac{x}{\ln x}$$

他还证明了任何自然数 n 与 $2n$ 之间至少有一个素数。

切比雪夫从机械原理出发，研究了用多项式逼近连续函数的问题，建立了偏离零最小函数的专门理论，做出区间 $[-h,h]$ 上的几个著名的多项式，称为切比雪夫多项式。

[评注 2] 基于 Chebyshev 多项式的公钥密码（Public Key Cryptosystem based on Chebyshev Polynomials,PKCCP）由 Kocarev 于 2003 年首先提出的①，是目前混沌公钥密码研究的热点。

[例 2-2-24] 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$。

[提示] 由题设 $(1+x^2)f'(x)=1$，建立递归公式：

$$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$$

所以有

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\(-1)^m(2m)!, & n=2m+1\end{cases}\qquad(m=0,1,\ \cdots)$$

[例 2-2-25] 证明星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上任意一点处的切线介于两坐标轴之间一段长度等于 a。

[提示] 星形线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\y=a\sin^3\theta\end{cases}$$

星形线在任意点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-a\sin^3\theta_0=-\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}\left(x-a\cos^3\theta_0\right)$$

星形线在任意点 (x_0,y_0) 处的切线与两坐标轴的交点设为 $A(x_a,0)$ 和 $B(0,y_b)$，其中 $x_a=a\sin^2\theta_0\cos\theta_0+a\cos^3\theta_0=a\cos\theta_0$，$y_b=a\sin^3\theta_0+a\sin\theta_0\cos^2\theta_0=ain\theta_0$，容易看出 $A(x_a,0)$

① Kocarev L,Makraduli J,Amato P.Public-Key Encryption Based on Chebyshev Maps[C]. Proceedings of the 2003 International Symposium on Circuits and Systems,2003,5(3):28-31.

与 $B(0,y_b)$ 两点之间的距离为 a。

[例 2-2-26] 求笛卡儿叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$ 的切线方程。

解：其参数方程 $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$， $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$， $-\infty<t<+\infty$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

当 $t_0=1$ 时，即在 $\left(\dfrac{3}{2}a,\dfrac{3}{2}a\right)$ 点处的切线方程是 $x+y=3a$ ；

当 $t_0=0$ 时，切线方程为 $y=0$ ；

在 $t=t_0$ 时，切线方程是

$$y-\frac{3at_0^{\ 2}}{1+t_0^{\ 3}}=\frac{t_0(2-t_0^{\ 3})}{1-2t_0^{\ 3}}\left[x-\frac{3at_0}{1+t_0^{\ 3}}\right]$$

令 $t_0\to\infty$，则得另一在原点的切线方程 $x=0$ 。

第 3 章　微分中值定理及其应用

只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄。但是，当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取对方的新鲜活力，并迅速地趋于完善。

——拉格朗日（Lagrange，1736—1813）/法国数学家、分析力学的奠基人

漂亮的论证，应该是文体优美、论证简洁、思路明晰、细节完美、形式对称，总之给人以深信不疑的感觉。

——阿蒂亚（Atiyah，1929—）/英国数学家、菲尔兹奖及阿贝尔奖得主、剑桥大学三一学院前任院长

§3.1　微分中值定理：局部与整体沟通的桥梁

内容提要：

进行局部的思考是为了深入地把握整体。在微分学里，拉格朗日建立的微分中值定理，乃是沟通局部性质与整体性质的桥梁，是由局部性质研究整体性质的典范，是利用函数的导数来研究函数本身性态的重要工具。

第 1 章我们学习了函数的概念，函数就是一个对应规则，明文与密文如何对应更安全，则是密码学的研究任务；第 2 章我们学习了导数的概念，社会学中时尚的推广速度、经济学中的边际成本、生物学中种群自然增长率等，这些变化率都可用导数来加以刻画；事实上，导数的应用很广，其重要基础就是今天要学习的微分中值定理。

整个微分学，从极限开始，研究函数的连续性，得出连续函数的三大重要性质（闭区间上连续函数的有界性、介值性、一致连续性）。引入函数的导数概念之后，最后利用连续函数性质并结合化归思想综合地证明了微分中值定理，达到了高潮。微分中值定理主要包括罗尔定理（1691 年《方程的解法》）、拉格朗日定理（1797 年《解析函数论》）和柯西定理，其研究经历了两百多年的时间，它从费马定理（1637 年《求最大值和最小值的方法》）开始，经历了从特殊到一般、从直观到抽象、从强条件到弱条件的发展阶段。

局部与整体之美：局部与整体是一对哲学范畴。要了解微积分，需要一点哲学思考。事实上，理解函数的局部形态并与函数的整体性质相联系，乃是领悟微积分思想方法精髓的重要一环。

函数可通过它们的整体性质来定义：通过它们的奇异点的分布；通过它们取值范围。这些整体性质正是一个特定函数与众不同的特性，局部展开只是看待它们的一种方式。一个类似的事情发生在微分方程中，一个微分方程的解的奇异性是真正决定其整体性质的东西；一个微分方程的解不必是一个显函数，人们不一定必须用好的公式来描述它们。

数论中的素数定理（见例 1-1-3）、微分几何中的陈省身-高斯-博内公式（见例 3-3-9）和拉格朗日中值定理一样，都由于揭示了整体性质和局部性质之间的内在联系，而显示了极端重要性。

3.1.1 罗尔中值定理

定理 3.1.1 费马定理：设函数 $f(x)$ 满足以下条件，即在闭区间 $[a,b]$ 有极值 $f(\xi)$；在点 $\xi\in(a,b)$ 处可导，则 $f'(\xi)=0$。

[提示]利用导数和极值的定义证明。

定理 3.1.2 罗尔中值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

分析：在 $f(a)=f(b)$ 的条件下，最简单的情况是 $f(x)$ 为常函数，在 (a,b) 内任一点 x 处均有 $f'(x)$；如果在 $x=a$ 处开始递增（递减），又要使 $f(a)=f(b)$，那么在某一点 $\xi\in(a,b)$ 处，必然由递增（递减），转向递减（递增），在该点处出现 $f'(\xi)$。

证明：函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的，所以在此区间上必取到最大值 M，最小值 m。以下通过两种情况来讨论。

（1）若 $M=m$，则 $f(x)\equiv M$ 是常数，所以 $f'(x)$=0，不必证明。

（2）若 $M>m$，由 $f(a)=f(b)$，所以函数 M，m 中一定有一个在点 ξ 处为 $f(x)$ 所取，不妨设 $M=f(\xi)$，下证 $f'(\xi)$=0。因为 M 是函数的最大值，所以 $f(\xi)$ 大于或等于 (a,b) 其他各点的函数值：

$$f(\xi)\geq f(\xi+\Delta x)\text{，或 }\Delta y=f(\xi+\Delta x)-f(\xi)$$

于是：① 当 $\Delta x<0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$，$f'_{-}(\xi)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$。

② 当 $\Delta x>0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0$，$f'_{+}(\xi)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0$。

因为 $\xi\in(a,b)$，由假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，因而 $f'(\xi)$ 存在，所以

$$f'(\xi)=f'_{-}(\xi)=f'_{+}(\xi)=0$$

[评注] 罗尔定理于 1690 年由法国数学家罗尔（Rolle，1652—1719）首先发现，在闭区间上连续、在区间内可微、在区间端点取等值的函数，其图形上至少存在一点，图形在该点的切线是“水平”的。与这个结论等价的是拉格朗日定理。

[例 3-1-1] 设 a、b、c 为实数，求证：方程 $\mathrm{e}^x=ax^2+bx+c$ 的根不会超过三个。

证明：用反证法。假设方程有四个不同的实根 x_i ($i=1$、2、3、4)，则函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2-bx-c$ 有四个不同的零点 x_i ($i=1$、2、3、4)，应用罗尔定理：

$f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax-b$ 有三个不同零点；

$f''(x)=\mathrm{e}^x-2a$ 有两个不同零点；

$f^{(3)}(x)=\mathrm{e}^x$ 有一个零点。

然而，已知函数 e^x 无零点，这便产生了矛盾。这矛盾说明反证法假设不成立，即方程至多只有三个根。

[评注] 分别画出 $y=\mathrm{e}^x$ 及 $y=ax^2+bx+c$ y 的图象，其交点个数一目了然。

[例 3-1-2] 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=0$。求证：在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=-f(\xi)/\xi$ 成立。

[提示] 对 $F(x)=xf(x)$ 在 $[0,1]$ 上用罗尔定理证明。

[例 3-1-3] 证明：勒让德多项式 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\dfrac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}$ 在 $(-1,+1)$ 内有 n 个根。

[提示] $(x^2-1)^n$ 在 $[-1,+1]$ 上有 $2n$ 个根，勒让德多项式见例 2-2-12。

3.1.2 拉格朗日定理

定理 3.1.3 拉格朗日定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$。

分析：由图 3.1.1 知，曲线上离弦最远的 C 点就是要找的点。若记曲线上任意一点 $P(x,f(x))$ 到弦 AB 的有向距离 $d(x)=PE$，求最远点 C 即求 $d(x)$ 的最大值。但由图可看出，有向距离 $d(x)=PE$ 与有向距离 PM 相差一个常数因子（其中 M 是过点 P 作 x 轴的垂线与弦 AB 的交点），求 $d(x)$ 的最大值相当于求 PM 的最大值。而 PM 容易表示出来，即曲线的纵坐标 $f(x)$ 减去弦 AB 的纵坐标：

$$PM=f(x)-f(a)-K(x-a)$$

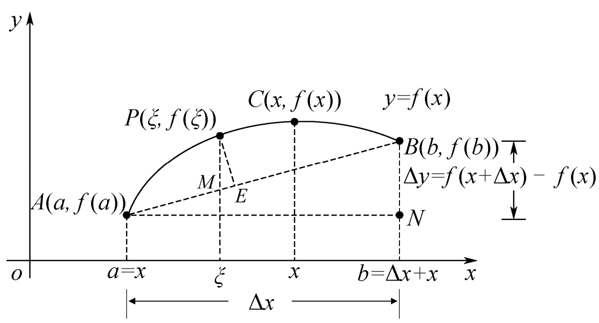


图 3.1.1 拉格朗日定理

[评注 1] 微分中值定理是说，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上点点都有导数，那么必定存在 $[a,b]$ 中的点 ξ，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。这是非常深刻的结果，它有重大的理论价值，其原因是左边由区间 $[a,b]$ 确定两点的函数值之差，乃是刚性的整体性质；右边则是一点 ξ 处的导数，涉及函数在一点的局部性质。这样一来，只要我们把局部性质研究透了，会求导数了，那么函数的整体性质就可以借助局部性质加以研究，不断深化。例如，利用每点导数恒大于 0，得出区间上为增函数的整体性质，显示了微积分的巨大威力。反过来，如果对函数的整体性质了解得透彻，那么它的某些局部性质也会显得非常美妙。例如，假如 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，于是断言函数一定能取得最大值；现在如果再加上在 (a,b) 内的点 c 取得最大值的条件（这些都是函数的整体性质），那么就一定有 $f'(c)=0$，这当然是函数在点 c 处很美妙的局部性质了。

[评注 2] 从几何上看：除了平行于 x 轴的直线外，再也画不出另外一条曲线，其上所有的切线都水平！从物理上看：如果物体的速度恒为零，该物体当然总是停在一个固定点!

[评注 3] 在证明过程中，不需要确定 a、b 哪一个大、哪一个小，这是拉格朗日中值公式的特点之一。

[评注 4] 微分中值定理也可由连续函数的介值定理与区间套定理得到证明。

[评注 5] 重要推论：设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的一个常量函数。

[评注 6] 可微函数 $y=f(x)$ 的在整个区间的平均变化率，一定等于变化区间的某个中间点处的瞬时变化率。

[评注 7] 若 $|f'(x)|\leqslant M$，$x\in(a,b)$，则 $f(x)\left|f(b)-f(a)\right|\leqslant M(b-a)$。

[评注 8] 拉格朗日有限增量公式：

$$\Delta f=f\left(x+\Delta x\right)-f(x)=f'\left(x+\theta\Delta x\right)\Delta x,\ 0<\theta<1$$

例如，当 $x\geqslant 0$ 时，试证 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$　$(\dfrac{1}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{1}{2})$，

并且　$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$。

[评注 9] 对于函数

$$f(t)=\begin{cases}t^2\sin\left(\dfrac{1}{t}\right), & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$$

在 $\left[0,x\right]$ 上应用拉格朗日中值公式，令 $\xi\to 0$，得 $\cos\left(\dfrac{1}{\xi}\right)\to 0$，对吗？

[例 3-1-4] 试证 $\left|\sin x-\sin y\right|\leqslant\left|x-y\right|$。

证明：对 $f(x)=\sin x$ 在区间 $\left[x,y\right]$ 上用拉格郎日中值定理，得

$\sin x-\sin y=\cos\xi(x-y)$，$\xi$ 介于 x 和 y 之间。

注意到 $\left|\sin'(\xi)\right|\leqslant 1$，即可得证。

[评注] 利用三角和差化积公式及 $\left|\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right|\leqslant 1$ 也可证明。

[例 3-1-5] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=?$

解：对 $y=e^x$ 在区间 $\left[x,\sin x\right]$ 上用拉格郎日中值定理，得

$$e^x-e^{\sin x}=e^{\sin x+\theta(x-\sin x)}\left(x-\sin x\right),\ 0<\theta<1$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=e^0=1$。

[评注] 若利用洛必达法则就比较烦琐。

[例 3-1-6] 证明 $3\arccos x-\mathrm{arc}(3x-4x^3)=\pi$，$|x|\leqslant 1/2$。

[评注 1] 用 $f'(x)=0$，得 $f(x)=C$。

[评注 2] 令 $\theta=\arccos x$，利用三倍角公式（见例 1-3-8）。

3.1.3 柯西中值定理

定理 3.1.4 柯西中值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，在开区间 (a,b) 内可导，并且 $g'(x)\neq 0$ $(x\in(a,b))$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

[提示] 令 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=k$，则 $f(b)-f(a)-(g(b)-g(a))k=0$。

将上式的 b 改为变量 x，做辅助函数：$\varphi(x)=f(x)-f(a)-k\left[g(x)-g(a)\right]$，

得 $\varphi(b)=\varphi(a)=0$，由罗尔定理得，存在 ξ 使得 $k=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

[评注 1] 当 $g(x)=x$ 时，上面的定理与拉格朗日定理有同一形式，所以柯西定理是拉格朗日定理的最一般的形式。

[评注 2] 柯西定理首先出现在柯西 1823 年出版的著作中，柯西用他自己创立的微分中值定理给出洛必达法则的严格证明。此外，柯西定理还是证明泰勒公式的重要工具（见§3.2）。

[评注 3] 在人文意境上，存在性定理最美丽动人的描述，应属贾岛（779—843）的诗句《访隐者不遇》：“松下问童子，言诗采药去；只在此山中，云深不知处。”老药师肯定在此山里，但是究竟在什么地方，却并不知道，即云深不知处。贾岛并非数学家，但是细细品味，觉得其诗的意境，简直就是为数学而作。

[评注 4] 柯西中值定理是否可以按如下公式证明：

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$， $g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)$，两式相除即可证明之。

[评注 5] 三个中值定理的统一证明思路：

令 $\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x)\end{vmatrix}$

（1） $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；（2） $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上可导；（3） $\varphi(a)=\varphi(b)$。

[评注 6] 微分中值定理的面积转化法：在曲线 $y=f(x)$ 上任取三点， $A(a,f(a))$、$C(x,f(x))$、$B(b,f(b))$，其中 $a<x<b$，则 ΔABC 的围面积为

$$S=S(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1\end{vmatrix}$$

[例 3-1-7] 证明：在 1 与 e 之间，存在 ξ，使得

$$\sin(1)=\cos(\ln\xi)$$

[提示] 令 $F(x)=\sin(\ln x)$， $G(x)=\ln x$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上用柯西中值定理证明。

[例 3-1-8] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导。若 $0<a<b$，则在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ，使得 $af(b)-bf(a)=[f(\xi)-\xi f'(\xi)](a-b)$。

分析：令 $G(x)=f(x)/x$， $F(x)=1/x$，在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理，得

$$(f(b)/b-f(a)/a)/(1/b-1/a)=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

3.1.4　人物简介

1．费马

费马时 17 世纪最伟大的数学家、法国“ 业余数学家之王 ”。他精通多国文字，掌握多门自然科学，近 30 岁才认真注意数学，但成果累累，其性情淡泊、为人谦逊，对著作无意发表。

其对解析几何学、微积分学及概率论的创立，都做出了杰出的贡献。费马是微积分的先驱，给笛卡儿的信中（1636 年、1638 年）中提出求极大、极小的步骤已相当于令导数为 0 且求极点的方法。牛顿清楚地说，他从费马画切线的方法中得到了微分法的启示。

2．拉格郎日

“ 拉格朗日是数学科学高耸的金字塔。”这是拿破仑 · 波拿巴（Naploleon Bonaparte，1769—1821）对 18 世纪最伟大、最谦虚的数学家约瑟夫-路易 · 拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange，1736—1813)经过斟酌的评价。1797 年，拉格朗日用“ $f'(x)$ ”表示对 x 的一阶导数；拉格郎日证明了 π 的无理性。论文《关于方程的代数解法的研究》(1771)，考察了二、三、四次方程的一种普遍解法。他 19 岁就成为都灵皇家炮兵学校的数学教授。1764 年，法国科学院悬赏征文，要求用万有引力定理解释月球天平动问题，他的研究获奖。他解决了费马提出的“ 一个正整数是不多于 4 个平方数之和 ”的问题。近百年来，数学领域的许多成就都可以直接或间接源于拉格郎日的工作，所以他在数学史上被认为是对分析数学的发展产生全面影响的数学家之一。拉格郎日著名的学生有傅里叶、柯西等。拉格朗日还是一位很好的作家，他的文笔流畅、风格清新。

[评注 1] $n=4^{\alpha}\cdot(8k+7)\quad(\alpha\geq 0,\ k\geq 0)$ 的正整数不能表示为三个整数的平方和。

[评注 2] $n=2\cdot 4^{\alpha}\,(\alpha\geq 0)$ 的正整数不能表示为四个正整数的平方和。

[评注 3] 除了下面 12 个数

1、2、3、4、6、7、9、10、12、16、18、33

之外，每个正整数都是五个正整数的平方和。

[评注 4] $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)$

$$
\begin{aligned}
&=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2+(a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2\\
&\quad+(a_1b_3-a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)^2+(a_1b_4-a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)^2\\
&\quad(a^2+b^2)(c^2+d^2)\\
&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\\
&\quad(a^2-b^2)(c^2-d^2)\\
&=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2
\end{aligned}
$$

3．柯西

柯西是思想明确的属于现代的第一个伟大的法国数学家。他出身于高级官员家庭，孩提时曾受授予拉格朗日等名家，早在 1811 年就解决了拉格郎日向他提出的一个问题：凸多面体的角是否可以被它的面所确定？答案是肯定的。这一直是几何学中的一个精彩结果。他是一位多产作家，发表论文 789 篇，著书 7 本，著作有思想、有创见。其发现和创立的定理和公式往往是一些最基本、最简单的事实。现代数学中两个很令人感兴趣的主要问题应归功于柯西，这两个问题中的每一个都标志着与 18 世纪数学的断然决裂。第一个是把严格性引进了数学分析。柯西给数学增添的第二个具有根本重要性的东西，是在相反的方面—组合方面。柯西抓住了拉格朗日在方程理论上的方法的核心，把它抽象化，开始了群论的系统创建。柯西给出了微积分

基本定理的第一个证明，他还是复变函数论的奠基人，是置换群和行列式研究的先驱者。

3.1.5 问题探究：化归之美

[例 3-1-9] 费马大定理（Fermat’s Last Theorem，1637 年）虽然很容易找到许多平方数使得它可以写成另外两个平方数的和，但同样的结论对立方数及任何的高次幂的数都不成立，即方程 $x^n + y^n = z^n (n \geq 3)$ 不存在正整数解。费马是一位杰出的数学家，他曾将这个断言写在他手抄的某本希腊数学著作的页面边缘上，他宣称“我对此定理有一个真正奇妙的证明，但是边缘的空白是如此之小而无法写下来”。

1995 年，英国数学家怀尔斯在《数学年刊》上，发表了解决费马猜想的论文，其中用了最现代的代数几何和数论许多分支的最新数学思想，他因此荣获 1997 年沃尔夫奖、1998 年国际数学联盟银奖。费马大定理的成功可与分裂原子或发现 DNA 的结构相比，是人类智力活动的一曲凯歌，柯尼斯堡的荣誉市民希尔伯特对费马猜想的评价是一只“会下金蛋的鹅”。

[评注 1] 化归例子：方程 $x^4 + y^4 = z^4$ 不存在自然数解。

引理：方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 满足条件 $(x,y)=1$，$2|x$ 的勾股数的充要条件是 $\exists m,\ n \in \mathbf{N}$，$(m,n)=1$，2 不整除 $(m-n)$，使得

$$x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$$

[化归] 方程 $x^4 + y^4 = z^4$ 有自然数解 $\Leftrightarrow$ 方程 $x^4 + y^4 = z^2$ 也有自然数解 $\Leftrightarrow$ 方程 $x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$，$z_1 < z$ 也有自然数解。由无穷递降法可知这是不可能的，所以方程 $x^4 + y^4 = z^2$ 在自然数中无解，从而得方程 $x^4 + y^4 = z^4$ 在自然数中也无解。

化归思想：将待解决或未解决的问题，通过某种转化过程，归结到一类已经解决或比较容易解决的问题中，最终得出原问题之解答的一种手段和方法，即化繁为简，以简驭繁。

[评注 2] 费马小定理：设 $(a,m)=1$，则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\bmod m)$，其中 $\varphi(m)$ 表示 1、2、$\cdots$、m 中和 m 互素的个数。

[评注 3] 初等数论是数学中“理论与实践”相结合的最完美的基础课程，近代数学中的许多思想和方法与技巧都是从整数性质的深入研究而不断丰富和发展起来的。数论在计算机科学、密码学、物理学、分子化学、量子计算和金融数学等学科所起的日益明显的作用也绝不是偶然的。RSA 密码系统就基于最著名和最基本的数论结果之一的费马小定理。

[例 3-1-10] （达布定理）设 $f'(x)$ 处处存在(但未必连续)，证明：若在 a、b 两点($a<b$)处有 $f'(a)f'(b)<0$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$。

[评注 1] 达布定理又称为导函数介值定理, 它是由法国数学家达布（Darboux, 1842—1917）给出的，由该定理还可直接推出：若 $f'(x) \neq 0$，则 $f'(x)$ 恒正或恒负。

[提示] $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) < 0 \Rightarrow x > a$，$x$ 与 a 充分接近时，有 $f(x) < f(a)$；同理由 $f'(b)<0$ 知 $x<b$，且 x 与 b 充分接近时，有 $f(x)<f(b)$，所以 $y=f(x)$ 不在端点 a、b 处取得最小值，由闭区间连续函数最值定理，$\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$，由 Fermat 定理得 $f'(\xi)=0$。

[例 3-1-11] 证明：$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$，$x>-1$，$x \neq 0$。

[提示] 对 $f(x)=\ln(1+x)$ 在区间 $[0,x]$ 上用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0+\theta(x-0))=\frac{1}{1+x\theta},\ 0<\theta<1$$

[评注 1] 由上式解出 $\theta=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$，用洛必达法则可证明 $\lim\limits_{x\to0}\theta=\dfrac{1}{2}$。

[评注 2] 用夹逼定理无法证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$。

[评注 3] 用定积分的几何意义来证明（见例 5-1-10）。

[例 3-1-12] 能否用中值定理证明 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调有界性？设两个常数 a 与 b 满足：$0\leq a<b$，对一切自然数 n 成立，则

（1）$\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)b^n\Rightarrow a^{n+1}>b^n[(n+1)a-nb]$。

① 令 $a=1+\dfrac{1}{n+1}$，$b=1+\dfrac{1}{n}\Rightarrow x_n\leq x_{n+1}$。

② 令 $a=1$，$b=1+\dfrac{1}{2n}\Rightarrow1>\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n\cdot\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}<4$。

（2）$(n+1)a^n<\dfrac{(b^{n+1}-a^{n+1})}{(b-a)}$。

[提示] 对函数 $f(x)=x^{n+1}$ 在区间 $[a,b]$ 上，$a\geq0$ 利用拉格朗日中值定理：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)=(n+1)\xi^n,\ a<\xi<b$$

再对函数 $f(t)=t^{n+1}$，$t\in[0,x]$，$x>0$ 利用拉格朗日中值定理：

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0+\theta(x-0))=(n+1)(\theta\ x)^n,\ 0<\theta<1$$

$$\theta=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\to1,\ (n\to\infty)$$

[例 3-1-13] 法国数学的人文主义传统（从笛卡儿到庞加莱（Jules Henri Poincare′，1854—1912)。在德国数学家高斯的一部传记中，作者引用了下面的这段话[①]：

有一个异乡在巴黎问当地人：“为什么贵国历史上出了那么多伟大的数学家？”

巴黎人回答：“我们最优秀的人学习数学。”

又去问法国数学家：“为什么贵国的数学一直享誉世界呢？”

数学家回答：“数学是我们传统文化中最优秀的部分。”

[评注] 高斯说过：“数学是科学的皇后，而数论是数学的女王。”高斯曾被形容为“能从九霄云外的高度按照某种观点掌握星空和深奥数学的天才”。他将自己的数种天赋—有创造力的直觉、卓越的计算能力、严密的逻辑推理、十全十美的实验—和谐地组合在一起，这种能力的组合使得高斯出类拔萃，在人类历史上找不到几个对手。只有阿基米德和牛顿可以与他相提并论，他们都非常多才多艺。

高斯还培养了许多著名的数学家，如黎曼、恩斯特 · 爱德华 · 库默尔（Ernst Eduard Kummer,

① 蔡天新．难以企及的人物：数学天空的群星闪耀．广西：广西师范大学出版社，2009.

1810—1893)、戴德金、威廉 · 韦伯（Wilhelm Weber,1804—1891）等。

学好数学的方法就是做数学。

——保罗 · 哈尔莫斯（Paul Halmos，1916—2006）/美国数学家，大学由化学工程和哲学专业改修数学

美是部分与部分之间、部分与整体之间固有的和谐……我们可以肯定地说，丝毫不亚于在艺术中的地位，它是启发和明晰的最重要的源泉。

——[德]沃纳 · 海森堡（Werner Heisenberg，1901—1976)/诺贝尔物理学获奖者

§3.2 洛必达法则和泰勒公式：柯西中值定理的应用

内容提要：

用多项式逼近一般函数，泰勒公式是一种有效方法，也可用正交多项式或插值多项式逼近。洛必达法则是利用导数工具求不定式极限的有效方法之一，但它对极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 无能为力。

统一之美：尽管科学的目的在于揭示宇宙的奥秘，但对真的追求中也不乏对美的向往，这既是因为自然界本身的和谐统一，也因为人们在自己的追求中注入了理想的、艺术的自由创造。真与美并行不悖，科学与艺术和谐统一，科学家和艺术家也可兼于一身。泰勒公式就体现了数学的统一美：各种彼此完全不同的函数，主要它们在某一包含 x_0 在内的开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数存在，居然都能表示成如式（3.2.1）的“统一形式”。

3.2.1 泰勒公式：通过无限认识有限

定理 3. 2. 1 泰勒中值定理：设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数 x，$x_0\in(a,b)$，则

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中，

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}，\ \xi=x_0+\theta(x-x_0)，0<\theta<1。\qquad(3.2.1)$$

[评注 1] $k=0$ 称为带拉格朗日余项的泰勒公式，它首次出现在拉格朗日于 1813 年出版的著名的《解析函数论》一书中，该公式证明时所使用的待定系数法是拉格朗日首创的。该公式的实质就是拉格朗日微分中值定理的进一步深化，它是一定量的估计公式。该公式在不等式证明及函数方程求解中有着广泛的应用。

[评注 2] $R_n(x)=0((x-x_0)^n)$

称为皮亚诺余项的泰勒公式，只要求 n 阶导数存在。皮亚诺余项的名称是以意大利数学家皮亚诺的名字命名的，其实质就是可微性定义（即有限增量公式）的进一步深化，即把局部用“线性函数替代”换为用“多项式替代”时，将产生一个高阶无穷小。该公式虽然是一个定性估计式，却能给近似计算与复杂的极限计算带来极大的方便。

[评注 3] **证明思想**：为方便直接引用罗尔定理，整个证明过程中，将 x 固定(不妨设 $x \neq x_0$)，且 $f(x)-\left[f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]-K(x-x_0)^{n+1}$，只需要证明 x 与 x_0 之间存在 ξ，使得 $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ 即可。

做辅助函数：

$$\varphi(t)=f(x)-\left[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]-K(x-t)^{n+1}$$

易见 $\varphi(x_0)=0$，$\varphi(x)=0$ 即可用罗尔定理。

[评注] 泰勒公式对于函数求值并非是万能的：

考虑函数 $f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，

则 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{\exp\left(t^2\right)}=0$；同理，$f^{(n)}(0)=0$，$n=2$，$3$，$\cdots$。

于是 $f(x)=0+\dfrac{f^{(m+n)}(\xi)}{(n+1)!}x^{m+n}=0(x^n)$。

这里的余项就是函数值本身。这表明函数值计算上没有告诉我们任何事情。

定理 3.2.2 麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1。$$

[例 3-2-1] 设 $a_n=1-n\sin(\dfrac{1}{n})$，试求出它的一个等价无穷小。

[提示] $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$。

其中，$R_{2m}(x)=\dfrac{\sin[\theta x+\frac{(2m+1)\pi}{2}]}{(2m+1)!}x^{2m+1}\left(0<\theta<1\right)$。

答案：$a_n\sim\dfrac{1}{6n^2}\quad\left(n\to\infty\right)$。

[例 3-2-2] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$。

[评注 1] $\sin x$ 的四阶泰勒公式：$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+0(x^3)$。

[评注 2] 洛比达法则（见 3.2.2）。

[评注 3] 利用正弦的三倍角公式 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$，得

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{3x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{(3x)^3}=\frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}+\frac{4}{27}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$$

所以，$A=\dfrac{1}{6}$。

[评注 4] 用极限的四则法则（见例 1-3-7）

人物简介：泰勒（Taylor，1685—1731）是 18 世纪早期英国牛顿学派最优秀的代表人之一。他 20 岁入剑桥大学圣约翰学院，29 岁获法学博士学位。27 岁在老师约翰 · 梅钦（John Machin，1686—1771）的一封信中宣布了现在形式的泰勒定理：

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\cdots$$

成为有限差分理论的奠基人。泰勒公式最早出现泰勒在 1715 年出版的著作《增量及其逆》中，在该书中泰勒没有给出证明。现在的形式及其严格的证明是由柯西在 19 世纪初才给出的；泰勒公式的特殊情形，即 $x_0=0$ 时的泰勒公式是用英国另一位数学家麦克劳林（Maclaurin，1698—1746）的名字命名的。

3.2.2　洛必达法则

定理 3.2.3：如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足以下条件，即

（1）在区间 (a,b) 内可微，$g'(x)\neq 0$；

（2）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$（或 ∞）；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$（或 ∞），

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$（或 ∞）。

[评注] 用洛必达法则求不定式极限的方法，最早出现在法国数学家洛必达（L'Hospital，1661—1704）于 1696 年出版的著作《无穷小分析》中。其实这个法则是瑞士数学家约翰 · 伯努利给洛必达当家庭教师时写给洛必达的一封信中告诉洛必达的，当时洛必达仅叙述了 0/0 型不定式求极限的方法，关于 ∞/∞ 型和 $\infty-\infty$ 型不定式求极限的方法是由欧拉建立的。

[提示 1] 泰勒公式指一个充分可微的函数 $f(x)$，在定点 x 附近处 $x+h$，很像关于 h 的多项式，即

$$f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

自然想到，将未知问题 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ 利用泰勒公式化归为已知问题 $\left(\dfrac{\text{多项式}}{\text{多项式}}\right)$。粗略地说，

$$\frac{f(x)}{g(x)}\approx\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2}{g(0)+g'(0)x+\frac{1}{2}g''(\eta)x^2}\quad(x\neq 0)$$

$$=\frac{f'(0)+\frac{1}{2}f''(\xi)x}{g'(0)+\frac{1}{2}g''(\eta)x}\approx\frac{f'(0)}{g'(0)}\quad(g'(0)\neq 0)$$

也可简单理解成

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}}\approx\frac{f'(0)}{g'(0)}\quad(x\neq 0)$$

[提示 2] 从微积分基本定理（定理 5.2.1）导出泰勒公式。

微积分基本定理的积分形式：若 $f(x)\in C[a,b]$，且 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$。将此式改写为

$$F(a+h)=F(a)+\int_0^h F'(a+t)\mathrm{d}t$$

同理，若 $F'(x)$ 连续可导，则有

$$F'(a+t)=F'(a)+\int_0^t F''(a+t_1)\mathrm{d}t_1$$

代入上式得

$$\begin{aligned}F(a+h)&=F(a)+\int_0^h\left(F'(a)+\int_0^t F''(a+t_1)\mathrm{d}t_1\right)\mathrm{d}t\\&=F(a)+\int_0^h F'(a)\mathrm{d}t+\int_0^h\int_0^t F''(a+t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t\\&=F(a)+F'(a)h+\int_0^h\int_0^t F''(a+t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t\end{aligned}$$

同理，若 $F''(x)$ 连续可导，则有

$$F(a+h)=F(a)+F'(a)h+\frac{F''(a)}{2}h^2+\int_0^h\int_0^t\left(\int_0^{t_1}F'''(a+t_2)\right)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t$$

定理 3.2.4：若 $F(x)$ 在区间 I 上有 $n+1$ 阶连续可导，a 和 $a+h$ 是 I 中的两点，则有

$$F(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{F^{(k)}(a)}{k!}h^k++\int_0^h\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}F^{(n+1)}(a+t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t$$

1．洛必达法则（一）：0/0 型

[例 3-2-3] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}$。

[评注] 等价化换可简单一些，即 $\sin x\sim x\quad(x\to 0)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

[例 3-2-4] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$。

答案：$\dfrac{3}{2}$。

[评注] 若分母变为 $f(x_1)$，$f(x_2)$，则不能用罗比达法则；当 $x\to\infty$ 时，过程仍然正确。

2．洛必达法则(二)：∞/∞ 型

[例 3-2-5] $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x}{x^n}$。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{nx^{n-1}}=0$。

[评注] 若$x \to \infty$或$x \to 0+0$会怎样？

3．洛必达法则(三)：其他型

[例 3-2-6] $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}}$。

[提示] 先求$\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$。因为$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以$\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$。

4．不能用洛必达法则的反例：奇异之美

[例 3-2-7] $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin\frac{1}{x}}{1-\sin\frac{1}{x}}=1$。

3.2.3 问题探究：最美公式

[例 3-2-8] 证明x是无理数。

反证：设e是有理数，它表示为分母是$\mathbf{N}$的分数，取$n>\max\{\mathbf{N},3\}$，则有

$$\mathrm{e}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!}=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\quad 0<\theta<1,\ 1<e^{\theta}<3$$

上式两边同乘以$n!$，得

$$n!(\mathrm{e}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!})=\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+1)}$$

但上式左边是整数，而右边$0<\dfrac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+1)}<1$。

上述矛盾，说明e是无理数。

[例 3-2-9] 求极限$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi\ \mathrm{e}n!\right)$。

[提示] 要确定这样一个极限，我们需要知道e$n!$的小数部分，直观的想法就是将e进行级数的展开。

由于$\mathrm{e}=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}+o\left(\dfrac{1}{(n+1)!}\right)$，这样有

$$2\pi\ en!=2\pi\ m+\frac{2\pi}{(n+1)}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi\ \mathrm{e}n!\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n+1}+o\left(\dfrac{1}{(n+1)!}\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{2\pi}{n+1}=2\pi$。

[例 3-2-10] 双曲函数不等式，使不等式$\mathrm{ch}x\le \mathrm{e}^{Cx^2}$成立的最大范围是（　　）。

（1）$|C|>1$　（2）$0<|C|<1$　（3）$C\ge\dfrac{1}{2}$　（4）$0<C<+\infty$

[提示] 所给不等式$\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}}{2}\le \mathrm{e}^{Cx^2}$当且仅当$C\ge\dfrac{1}{2}$时，对所有实数都成立。

设$C\ge\dfrac{1}{2}$，因为$(2n)!\ge 2^n n!$　($n=0$、1、2、$\cdots$)，故对一切x，有

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\le\sum_{N=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}=e^{\frac{1}{2}x^2}\le e^{Cx^2}$$

反之，若不等式对一切 x 成立，则 $0\le\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp(Cx^2)-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+Cx^2+\cdots\right)-\left(1+\dfrac{1}{2}x^2+\cdots\right)}{x^2}=C-\frac{1}{2}$$

所以答案为（3）。

[例 3-2-11] 函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式的前三项系数是多少?

答案：$c_0=1$，$c_1=-\dfrac{1}{2}$，$c_2=\dfrac{1}{12}$。

解：设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$，$|x|\le 2\pi$ （3.2.2）

则由

$$e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\right)\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)=x$$

比较两边 $x^k\,(k=1,2,\cdots)$ 的系数，得到

$$c_0=1 \tag{3.2.3}$$

$$\frac{c_0}{(n+1)!}+\frac{c_1}{n!}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{2}+c_n=0,\quad n=1,2,\cdots \tag{3.2.4}$$

所以

$$\begin{cases} c_0=1 \\ \dfrac{c_0}{2!}+c_1=0 \\ \dfrac{c_0}{3!}+\dfrac{c_1}{2!}+c_2=0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \dfrac{c_0}{(n+1)!}+\dfrac{c_1}{n!}+\cdots+\dfrac{c_{n-1}}{2!}+c_n=0 \end{cases}$$

$$c_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \\ \dfrac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3!} & \dfrac{1}{2!} & 1 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{(n+1)!} & \dfrac{1}{n!} & \dfrac{1}{(n-1)!}\cdots & \dfrac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \tag{3.2.5}$$

称 $c_n n!$ 为**伯努利数**，记为 B_n，则 $\boldsymbol{B_n = f^{(n)}(0)}$。

由式（3.2.4）得

$$\frac{B_0}{(n+1)!0!}+\frac{B_1}{n!1!}+\cdots+\frac{B_n}{1!n!}=0，\quad n=1、2、\cdots \tag{3.2.6}$$

即

$$B_0C_{n+1}^0+B_1C_{n+1}^1+\cdots+B_nC_{n+1}^n=0 \tag{3.2.7}$$

此公式可化简为

$$(1+B)^{n+1}-B^{n+1}=0 \tag{3.2.8}$$

在二项式展开后，将所有的指数都改为下标，就可以得到式（3-2-7），即一般的，B_n 满足以下递推公式

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

其中，B_n 的分母$=\prod_{p-1|n}p$。

[评注 1] 最初，伯努利数和伯努利多项式的出现是为了计算下列和式的一般表达式 $S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k$，例如，$S_1(n)=\dfrac{(n-1)n}{2}$，$S_2(n)=\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$，$S_3(n)=\dfrac{(n-1)^2n^2}{4}$。有关伯努利数的工作是由瑞士数学家雅各布 ·伯努利和日本数学家关孝和（Seki Takakazu, 1642—1708）独立完成的，并先后在 1713 年和 1712 年发表的[①]。

举例如下：

$B_0=1$，$B_1=-\dfrac{1}{2}$，$B_2=\dfrac{1}{6}$，$B_4=-\dfrac{1}{30}$，$B_6=\dfrac{1}{42}$，$B_{2k+1}=0$，$k\geq 1$，$B_8=-\dfrac{1}{30}$，$B_{10}=\dfrac{5}{66}$，$B_{12}=-\dfrac{691}{2730}$，$B_{14}=\dfrac{7}{6}$，$B_{16}=-\dfrac{3617}{510}$，$\cdots$

[评注 2] 英国皇家学会会员、柏林科学院院士斯特林是牛顿流派数术重要的鼓吹者之一。1730 年，他出版了一本重要著作—《微分法》，书中考察了级数（用现代符号）

$$\ln n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi}+\frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)\cdot 2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots$$

等价于

$$n!=\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\cdot\exp\left[\frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{B_4}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)\cdot 2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots\right]$$

其中，系数 B_k 是伯努利数。

[评注 3] 伯努利多项式的等价定义如下。

设 x 是复数，满足下列方程的多项式 $B_n(x)$ 称为第 n 个伯努利多项式，

① 蔡天新．数之书．北京：高等教育出版社，2014.

$$\frac{z\mathrm{e}^{xz}}{\mathrm{e}^{z}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n,\ |z|<2\pi$$

特别的，$B_n(0)=B_n$ 被称为第 n 个伯努利数。

伯努利多项式 $\boldsymbol{B_n(x)}$ 定义要满足以下两个条件：

（1）$B_0(x)=1, \frac{1}{n}B_n{}'(x)=B_{n-1}(x)$，$\int_0^1 B_n(x)dx=0$，$n=1$，2，3，…。

（2）$B_n(0)=B_n(1)$，$n\geq 2$。

[评注 4] 对任意非负整数 n，恒有

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

其中，前 5 个伯努利多项式为

$$B_0(x)=1,\quad B_1(x)=x-\frac{1}{2},\quad B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},\quad B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$$

[评注 5] 对任意非负整数 n，恒有

$$B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)=(n+1)x^n$$

证明提示：

把下列恒等式两端依次展开成 z 的幂级数

$$z\frac{\mathrm{e}^{(x+1)z}}{\mathrm{e}^{z}-1}-z\frac{\mathrm{e}^{xz}}{\mathrm{e}^{z}-1}=z\mathrm{e}^{xz}$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x+1)-B_n(x)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}z^{n+1}$$

[评注 6] 设 n、m 是任意正整数，则

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+(m-1)^n=\frac{B_{n+1}(m)-B_{n+1}}{n+1}$$

提示：$$\sum_{k=1}^{n}k^c=\frac{1}{c+1}n^{c+1}+\frac{1}{2}n^c+\frac{c}{2}B_2n^{c-1}+\frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B_4n^{c-3}+\frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}B_6n^{c-5}+\cdots$$

这个级数加到 n 的最后一个正幂为止。

[评注 7] 在英国数学家怀尔斯证明费马大定理以前，伯努利数和相关的同于式在这个问题研究中一直起着重要作用。

设 $p>3$，如果伯努利数 B_2、B_4…、B_{p-3} 的每一个分子不被 p 整除，这样的素数 p 称为正规素数，否则叫非正规素数。德国数学家库默尔证明了：当 p 为正规素数时，费马大定理成立。不难计算，当 $3<p<100$ 时，除 $p=37$、59、67 以外，其余的素数都是正规素数。因此，在费马大定理的研究中，库默尔的结果是一项突破性的工作。

[评注 8] 设复数 s 的实部 $\sigma>1$，黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 在半平面 $\sigma>1$ 上解析并可延拓到整个平面。ζ 函数在实轴整数点上的值与伯努利数和伯努利多项式密切相关，通过 ζ 函数的函

数方程，我们可以得到如下关系式：

$$\zeta(-n)=-\frac{B_{n+1}}{n+1},\quad \zeta(2k)=(-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}>0$$

从而得到$\zeta(-2n)=B_{2n+1}=0\ (n\geq 1)$，但黎曼猜想（见 1.1.4）指$\zeta$函数的所有非平凡零点的实部都是$\frac{1}{2}$。

[例 3-2-12] 证明：

（1）$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$，对一切$x$都成立。

（2）$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$，对一切$x$都成立。

[提示] 这两个级数是公式

$$\int_0^x \sin u\mathrm{d}u=1-\cos x,\quad \int_0^x \cos u\mathrm{d}u=\sin x$$

的简单推论。我们从不等式

$$\cos x\leq 1$$

开始，两端都由 0 到x积分，这里x是任意确定的正数。我们求得

$$\sin x\leq x$$

再次积分，得

$$1-\cos x\leq\frac{x^2}{2},\ 即\cos x\geq 1-\frac{x^2}{2}$$

再次积分，得到

$$\sin x\geq x-\frac{x^3}{2\cdot 3}=x-\frac{x^3}{3!}$$

按此方式无限进行下去，就可得到两组不等式：

$$\sin x\leq x \qquad \cos x\leq 1$$

$$\sin x\geq x-\frac{x^3}{3!} \qquad \cos x\geq 1-\frac{x^2}{2!}$$

$$\sin x\leq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!} \qquad \cos x\leq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

……

当$n\to\infty$时，$\frac{x^n}{n!}\to 0$。为了证明这一点，我们选取一固定的整数m使$\frac{x}{m}<\frac{1}{2}$，并且记$c=\frac{x^m}{m!}$。对于任意整数$n>m$，令$n=m+r$，那么

$$0<\frac{x^n}{n!}=c\bullet\frac{x}{m+1}\bullet\frac{x}{m+2}\bullet\cdots\bullet\frac{x}{m+r}<c\left(\frac{1}{2}\right)^r$$

当$n\to\infty$时，$r\to\infty$，因而$c\left(\frac{1}{2}\right)^r\to 0$，由此可知

$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots \end{cases}$$

[评注]这两个级数无论从哪一项截断, 其误差就绝对值来说都不超过被舍去部分的第一项。

[例 3-2-13] 最美公式：$e^{\pi i}+1=0$。

我们用

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

作为指数函数的定义。在经过微分学很长的旅行以后偶然地发现：

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

最后把 e^x 中的 x 换成 ix，又完全偶然地得到了欧拉公式。

最美公式由数学家欧拉（Euler，1707—1783）1748 年给出：$e^{\pi i}+1=0$。

德国数学家克莱因曾赞誉此公式“是整个数学中最卓越的公式之一”。菲尔兹奖和沃尔夫奖得主大卫 · 芒福特（David Mumford，1937—）称它是“一个真正的数学精品”。该公式的神奇之处在于实现了数学上五个最重要的常数 1、0、π、e、i 自然和谐地统一在一起，算术的 0 和 1、虚数 i、几何上的π和用于数学分析的 e，日月如合璧，五星如连珠。该方程简洁、优美、深刻，表达了一个思想的世界、一个真理的世界、一个诗歌的世界和一个宗教的世界。此外，德国数学家林德曼（Ferdinand von Lindemann，1852—1939）[①]正是利用这一公式证明了π是超越数，从而彻底解决了困扰数学两千多年的古希腊“三大几何问题”中的—“化圆为方”问题。在自然科学中，e 的作用不亚于π，在微积分中，以 e 为底时具有最简洁的形式。

[评注] 美国《数学情报员》杂志曾于 1988 年刊出数学上 24 个著名的定理，让读者给每一个定理打分，评出最美的定理。满分 10 分。统计结果中前五名如下。

第一名　$e^{\pi i}+1=0$（得分：7.7）。

第二名　$V+F-E=2$（得分：7.5）。

第三名　素数有无穷多（得分：7.5）。

第四名　正多面体只有五种（得分：7.0）。

第五名　$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$（得分：7.0）。

[例 3-2-14] 证明：满足不等式

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

的实数 x 的集合是互不相交的区间的并集，并且这些区间的长度的总和等于 1988。

证明：(1) 分析条件。观察 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{70}\dfrac{k}{x-k}$ 的性质 $f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{70}\dfrac{(-k)}{(x-k)^2}<0\ (x\neq k)$ 时，易见：

① $x\in(j,j+1),(j=1,2,\cdots,69)$，当 $x>j$，$x\to j$时，$f(x)\to+\infty$；当 $x<j+1$ 且当 $x\to j+1$，$f(x)\to-\infty$；$f(x)$ 在区间$(j,j+1)$上单调减少。

① [德]菲利克斯 · 克莱因．高观点下的初等数学（第一卷）．舒湘芹译．上海：复旦大学出版社，2008.

② $x\in(70,+\infty)$，易见$f(x)>0$且当$x>70$，$x\to 70$时，$f(x)\to+\infty$；当$x\to+\infty$，$f(x)\to 0$时，$f(x)$在区间$(70,+\infty)$上单调减少。

（2）解题。由分析在$(j,j+1)$中有唯一的一个x_j，使得$f(x_j)=5/4$而在$(j,j+1)$上使$f(x)\geq\dfrac{5}{4}$的x即是区间(j,x_j)，$(j=1,2,\cdots,69)$。在$(70,+\infty)$上存在唯一的一个x_{70}，使得$f(x_{70})=5/4$，而在$(70,+\infty)$上使$f(x)\geq\dfrac{5}{4}$的x即是区间$(70,x_{70}]$，于是$\{x\mid f(x)\geq\dfrac{5}{4}\}=\bigcup\limits_{k=1}^{70}\left(k,x_k\right]$，所以满足$f(x)\geq\dfrac{5}{4}$的$x$的集合是 70 个互不相交的区间的并集，它们的长度为

$$D=\sum_{k=1}^{70}(x_k-k)=\sum_{k=1}^{70}x_k-\sum_{k=1}^{70}k$$

x_k是方程$f(x)=\dfrac{5}{4}$的根，即是

$$\begin{aligned}&5(x-1)(x-2)\cdots(x-70)\\&=4\big((x-2)\cdots(x-70)+2(x-1)(x-3)\cdots(x-70)+\cdots+70(x-1)(x-2)\cdots(x-69)\big)\end{aligned}$$

的根，此多项式恰是 70 次，有 70 个根x_k，$k=1,2,\cdots,70$。

$$\sum_{k=1}^{70}x_k=-\frac{a_{69}}{5}=-\frac{(5\sum\limits_{i=1}^{70}(-i)-4\sum\limits_{i=1}^{70}(+i))}{5}=\frac{9}{5}\sum_{k=1}^{70}i$$

所以$D=\dfrac{9}{5}\sum\limits_{k=1}^{70}i-\sum\limits_{k=1}^{70}k=\dfrac{4}{5}\sum\limits_{k=1}^{70}i=\dfrac{9}{5}\times\dfrac{70\times 71}{2}=1998$。

[评注] 此题是于 1998 年在澳大利亚举行的第 29 届国际数学奥林匹克竞赛的第 4 题, 此证明属于北京大学数学系 88 级学生何宏宇[①]。

[例 3-2-15] 试证

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7}+\cdots$$

[提示] 牛顿利用积分式

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x \tag{3.2.9}$$

利用二项级数

$$(1+a)^p=1+pa+\frac{p(p-1)}{2!}a^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}a^3+\cdots$$

得被积函数的麦克劳林级数为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}&=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\overset{y=-x^2}{=}(1+y)^{-\frac{1}{2}}\\&=1-\frac{1}{2}y+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}y^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}y^3+\cdots\\&=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

① 刘培杰．历届 IMO 试题集（1959—2005）．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2006.

代入式（3.2.9）左端，并利用式（3.2.10）逐项积分，即可得到 $\arcsin x$ 的麦克劳林级数：

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots \left(|x| \le 1\right) \tag{3.2.11}$$

在式（3.2.11）中取 $x = \frac{1}{2}$，就得到

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7} + \cdots$$

[评注] 上式是用无穷级数来表示 π 的又一个公式，但这个级数比莱布尼茨级数 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ 收敛要快得多（见 5.2.5）。

牛顿的事业有很多的继承者，其中最突出的一位就是欧拉。按中国数学家陈建功（Chen Jiangong，1893—1971）先生的说法，“欧拉是最伟大的十八世纪数学家，瞽目十七年中创作惊人”。

由于这个世界构造完美无缺，并由最聪明的造物主所创立，以至于在这个世界上无论什么事里都包含极大或极小的道理。

——欧拉（Euler，1707—1783）/瑞士物理学家，分析的化身

一篇好文章，胜过一百篇垃圾文章。

——格罗腾迪克（Grothendieck，1928—2014）/法国数学家、菲尔兹奖获得者

§ 3.3　微分学的应用：运筹帷幄中，决胜千里外

内容提要：

本节主要研究微分学在函数研究方面的应用：根据导数的几何意义和微分的运算法则，函数的数量可以在其几何意义的指导下运用微分运算来进行研究。

极值的概念来自数学应用的最值问题。定义在一个有界闭区域上的每一个连续函数都必定达到它的最大值和最小值，问题在于要确定它在哪些点处达到最大值和最小值；如果不是边界点就一定是内点，因而是极值点。如果一个函数在一点的一个领域内处处都有确定的值，而以该点处的为最大(小)，这个函数在该点处的值就是一个极大(小)值。

对于可微函数 $y = f(x)$ 来说，随着自变量 x 取值的变化，函数曲线的的倾角也随之在变化。如果随 x 增大倾角减少，则称曲线向上凸，或凸。当 $f''(x)$ 存在而且小于零时，$f'(x)$ 单调减少，即切线的倾角随 x 增大而减少，因而曲线向上凸；反之，当 $f''(x)$ 存在，而且大于零时，则曲线向下凸或凹。

本节主要利用导数研究函数的单调增减性、极值与最值，利用导数研究曲线的凹凸性、拐点来进一步描绘函数图形。

在初步介绍曲率概念的基础上，简要说明陈省身-高斯-博内公式和拉格朗日中值定理一样，都由于揭示了图形整体性质和局部性质之间的内在联系，显示了其极端重要性。

以美求真：挪威卑尔根大学的数学家和心理学家首次证明，美是发现真理的源泉。麦克斯韦方程、陈省身-高斯-博内公式、门捷列夫周期表、最小作用原理的例子可以验证那句拉丁格言：“美是真理的光辉。”当有人问我国著名科学家王元院士，现今的数学研究绝大多数没有实

用价值，那么你们凭什么说这项成果可以得一等奖，那项成果可以得二等奖呢？王元（1930—）非常干脆地回答："是"美学标准，也就是它的结果是否"漂亮"、"干净"，或"beautiful"，……这是数学工作唯一被为大多数数学家所共同接受的标准。

中国数学史专家、数学教育家钱宝琮曾说："人类有'求真、求美'之天性，则有科学、艺术。中国士人知真、知美之可贵，当以为真和美不宜分离。"

3.3.1　函数单调性、极值与最值：最小作用量原理

1．利用导数研究函数的极值与最值

[例 3-3-1] 如图 3.3.1 所示，请观察总结：单调函数的切线有何特点？

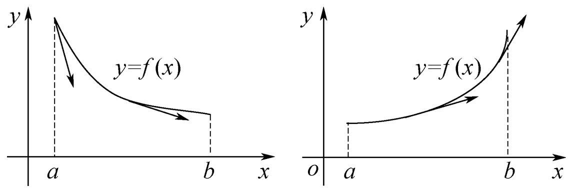


图 3.3.1　函数的单调性

[评注 1] 函数在点 x_0 处最得极值的必要条件是 x_0 为该函数的驻点，即 $f'(x_0)=0$，但导数为零的点不一定是极点，极值也可能是导数不存在的点，如图 3.3.2 所示。

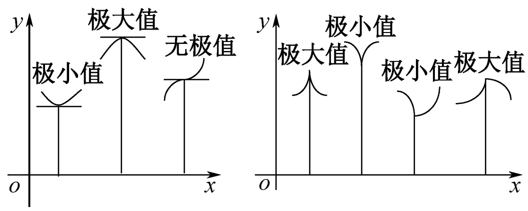


图 3.3.2　极值与最值

[评注 2] 函数在点 x_0 处取得极值的充分条件是，函数在 x_0 的某个领域内可导且 $f'(x_0)=0$。如果当 x 取 x_0 左附近的值时，$f'(x)$ 恒为正（负），当 x 取 x_0 或附近的值时，$f'(x)$ 恒为负（或正），则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大（或极小）值；如果 $f'(x)$ 在 x_0 左右附近不变号时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值。

[例 3-3-2] 幂指不等式 $x>4$，$2^x>x^2$ 对吗？

答案：对。

[例 3-3-3] 求次数最低的多项式。当 $x=1$ 时，它取极大值 6；当 $x=3$ 时，它取极小值 2。

答案：$p(x)=x^3+6x^2+9x+2$。

[例 3-3-4] 已知 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)}=1$，那么 $f(x)$ 在 $x=a$ 处（　　）。

（1）导数存在，但 $f'(a)\neq 0$　　（3）取得极大值

（3）取得极小值　　（4）导数不存在

答案：(1)。

[例 3-3-5] 当 $0<x\leq\dfrac{\pi}{2}$ 时，证明：$\dfrac{\sin x}{x}\geq\dfrac{2}{\pi}$。

[提示]当 $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ 时， $\tan x>x$ ， $\cos x>0$ 。

令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ，则 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$ ，而 $f'(x)=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0$ 。

[例 3-3-6] 证明：在数列 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\cdots$ 中项 $\sqrt[3]{3}$ 的值最大。

证明：今令 $y=x^{\frac{1}{x}}\left(x>0\right)$，两边取对数有 $\ln y=\frac{1}{x}\ln x$，两边求导数有

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x^2}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln x\Rightarrow y'=x^{\frac{1}{x}-2}\left(1-\ln x\right)$$

由 $y'=0$，可得 y 的驻点 $x=\mathrm{e}$。

又当 $0<x<\mathrm{e}$ 时， $y'>0$ ；当 $\mathrm{e}<x<+\infty$ 时， $y'<0$ 。所以 $x=\mathrm{e}$ 是 $y=x^{\frac{1}{x}}\left(x>0\right)$ 的极大值点。

又因 $2<\mathrm{e}<3$，且 $1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ ，同时 $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\cdots$，这就说明在数列 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \cdots$ 中项 $\sqrt[3]{3}$ 的值最大。

[评注] 令 $a_n=\sqrt[n]{n}$，则 $a_n\to$ ？

[提示] 令 $\alpha_n=\sqrt[n]{n}-1$，则由 $n=(1+\alpha_n)^n\geq\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$，得

$$0\leq\alpha_n\leq\frac{\sqrt{2}}{(n-1)},\quad\forall n\geq 2$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ 。

或由 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^0=1$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ 。

[例 3-3-7] 证明序列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$ 单调减少。

[提示] 求函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 的导数，得

$$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)$$

而 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$ （见例 3-1-11），从而 $f'(x)<0$ 。

[评注 1] 函数的极值与最值的区别与联系：函数的极值是局部概念，极值在一点 x_0 附近对函数值比较大小，与离 x_0 稍远的地方的函数值无关；而函数的最值是整体概念，函数在某区间上的最大值、最小值是在整个区间上对函数值比较大小；闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的最值可能在该区间的内部取值，则 $f(a)$ (或 $f(b)$)不可能是极值；若 $f(x_0)$ $(x_0\in(a,b))$ 是函数 $f(x)$ 的最值，则 $f(x_0)$ 一定是其极值，可见闭区间上的连续函数的最值不一定是极值；反之，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内取得的极值也不一定是最值，若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内只有一个极值，则这个极值就是最值。

[评注 2] 人类似乎永远处于一种迷雾中，永远存在“下一步怎么走，明天怎么办”的问题，运筹学就是在这样的环境中诞生和成长的。运筹学，原名“Operational Research”，经科学院许

国志、周华康先生根据《汉书 · 张良传》中的名言“运筹帷幄中，决胜千里外”将其译作运筹学，立即被大家接受。运筹学起自第一次世界大战时期，形成于第二次世界大战时期，后来一直积极发展，至今方兴未艾。

[评注 3] 极大与极小简史。从 17 世纪以来，极值的一般理论—极大与极小已成为科学上系统的完整的原理之一。费马微分法的第一步就是希望能用一般的方法研究极大和极小问题。17 世纪以后，由于“变分法”的发明，使这些方法的范围大大扩展了，同时逐渐了解到自然界的物理规律很适合用极小原理来表示；这个极小原理提供了一个很自然的方法，使我们差不多能完全解决各种特殊问题。近代数学最显著的成就之一就是平稳值理论，这是极值概念的一种推广，它把分析和拓扑学结合在一起了。

[例 3-3-8] 设 $f(x)$ 在点 x_0 处有一阶、二阶导数

$$y_0' = f'(x_0)，y_0'' = f''(x_0)$$

求过点 $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 的圆

$$\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 = R^2 \tag{3.3.1}$$

使它在 M 点与给定的函数有相同的一阶、二阶导数。

[提示] 对式（3.3.1）两边连续两次求导，解出 (a,b) 和 R 得

$$b = y_0 + \left(1 + {y'_0}^2\right)$$

$$a = x_0 - y_0'\left(1 + {y'_0}^2\right) / y_0''$$

$$R = \left(1 + {y'_0}^2\right)^{3/2} / y_0'' \mid$$

[评述 1] （1）R 称为函数在 M 点的曲率半径。

（2）$k = 1/R$ 称为函数在 M 点的曲率。

（3）圆心 (a,b) 称为函数在 M 点的曲率中心。

（4）若函数在任意点的二阶导数存在，且不为 0，则有 $b\left(x\right) = y\left(x\right) + \left(1 + y'^2\left(x\right)\right) / y''\left(x\right)$，$a\left(x\right) = \ \ x - y'\left(x\right)\left(1 + y'^2\left(x\right)\right) / y''\left(x\right)$，$R\left(x\right) = \left(1 + y'\left(x\right)\right)^{3/2} / y''\left(x\right)$。

（5）曲率表示曲线 $y = f(x)$ 在 $M\left(x, f(x)\right)$ 图形的弯曲程度。

[例 3-3-9] 求 $y = ax^2 + bx + x$ 上哪一点处的曲率最大？

答案：$x = -b/2a, k = 2a$。

[评注 1] 圆上每一点的曲率均相同：$k = 1/R$，具有不变性，其他曲线上的点可近似看做小圆，变量在一定条件下又具有不变性。

[评注 2] 国际数学大师陈省身先生于 1946 年发表了一篇短短六页的手稿，他首创了一个叫做纤维丛的概念，在纤维丛中进行积分的想法是他“神来之笔”，以此提出了著名的陈省身-高斯-博内公式：$\int_M Pf\left(\Omega\right) = \left(2\pi\right)^n \chi\left(M\right)$。从最高层的观点来说，这里说的是，如果你住在一个弯曲空间或“流形”（此处以 M 标记）中，我们就可以通过测量每一点的曲率（Ω，球面上每一点的曲率都是 $\frac{1}{R^2}$，此处 R 是球面的半径）来得到我们的宇宙（此处以 $\chi\left(M\right)$ 标记，即 M 的欧拉示性数；在二维空间内，该数告诉我们该空间的孔数）的一些总体情况。Pf 是我们必须对曲率进行的某种特定计算，积分符号（$\int$ ）意味着必须加和流形内每一点上的曲率，这是一个卓越的整体公式。该公式表明，表面的总曲率是量子化的：它永远是 2π 的整数倍。这一

公式预示了 20 世纪的数学与物理学对量子化挥之不去的情结。

总之，陈省身-高斯-博内公式和拉格朗日中值定理一样，都由于揭示了图形整体性质和局部性质之间的内在联系，而显示了其极端重要性。

3.3.2　曲线的凹凸性及函数作图：一副图象胜过千言万语

1．曲线凹凸性定义

定义 3.3.1：如果函数 $f(x)$ 内任意两点 x_1，x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的。

[评注] 对于凸函数，有更一般的不等式

$$f\left(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2\right)\leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x2)$$

成立，其中 λ_1、λ_2 是使 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 且 $\lambda_1\geq 0$、$\lambda_2\geq 0$ 的任意两个常数，这等价于这样的命题，即在连接图象两点的线段上，没有位于图象下面的点。

[例 3-3-10]　$y=x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凹的，而其反函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 上 $(0,+\infty)$ 为凸的。

[例 3-3-11]　$y=f(x)=x\ln x$， $y''=\frac{1}{x}>0\ \left(x>0\right)$ 所以成立：

$$x\ln x+y\ln y>\left(x+y\right)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

2．曲线凹凸的断定定理

定理 3.3.1：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $[a,b]$ 上具有一二阶导数，那么

(1) 若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的；

(2) 若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的。

[评注 1] 凹曲线的几何意义：凹曲线上任意两点所连弦的中点，总是位于曲线相应点的上方。

[评注 2] 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的，则 $f(x)$ 在每一点的左、右倒数存在，即 $f(x)\in C[a,b]$。

[评注 3] 对于光滑曲线 $y=f(x)$ 来说，曲线是凹弧曲线的切线斜率 $f'(x)$ 是单调增加的。

[评注 4] 若 $f''(x)$ 存在，且曲线是凹的，则 $f''(x)>0$。

[提示 1] 这里仅讨论三点 x_1，x_2，$(x_1+x_2)/2$ 的函数值关系，所以将 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 依次展开为 $x_0=(x_1+x_2)/2$ 的一阶泰勒公式：

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)\left(x_1-x_0\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(x_1-x_0\right)^2$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)\left(x_2-x_0\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(x_2-x_0\right)^2$$

两式相加，得 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x2)}{2}$。

[提示 2] 设$x_1 < x_2$， $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，在$[x_1, x_0]$，$[x_0, x_2]$上分别应用拉格朗日定理，并注意到$f''(x) > 0$，可知，曲线的切线斜率$f'(x)$是单调增加的，即当$\xi_1 < \xi_2$时，$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$化简得

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x2)}{2}$$

[例 3-3-12] $f(x)$是凹曲线，则它的图形在它任意一条切线之上，即：设$f(x) \in [a,b]$，在(a,b)上二阶可导，$f(x)$是凹的，$x_0 \in (a,b)$有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (a \leq x \leq b)$$

对任意$x_i \in (a,b)$，$i = 1,2,\cdots,n$，取$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

$$f(x_i) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq nf(x_0) + f'(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - nx_0\right) = nf(x_0)$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

[评注 1] 取$f(x) = \ln x$，因$f''(x) = -1/x^2 < 0$，所以证明了算术平均与几何平均不等式。

[评注 2] 取$f(x) = x^2$，因为$f''(x) = 2 > 0$，所以可以证明 Cauchy 不等式。

[评注 3] 用导数研究曲线的凹凸 、拐点时，应注意：

（1）点$(x_0, f(x_0))$为曲线$y = f(x)$得拐点的必要条件是$f''(x_0) = 0$；

（2）点$(x_0, f(x_0))$为曲线$y = f(x)$得拐点的充分条件是如果$f''(x_0) = 0$或$f''(x_0)$不存在，而$f''(x)$在x_0点左右附近异号(当$f''(x_0)$不存在时，函数$f(x)$在x_0处必须连续)。

3．渐进线

[例 3-3-13] 曲线$y = 1 + e^{\frac{1}{x}}$的水平渐近线为$y = 2$，铅直渐近线为$x = 0$；而曲线$y = x + \dfrac{1}{x}$的铅直渐近线为$x = 0$，斜渐近线为$y = x$。

[评注] 渐进线的概念见定义 1.4.2。

4．函数作图一般步骤

函数作图的一般步骤如下。

（1）讨论函数的初等性质：定义域、奇偶性、周期性。

（2）讨论增减性和极值。

（3）讨论凹凸性 、拐点。

（4）讨论函数在无穷远处的形态，有无渐近线。

（5）有必要计算出几个函数值。

[例 3-3-14] 描绘函数$y = 1 + \dfrac{36x}{(x+3)^2}$的图形。

解：（1）函数的定义域：$(-\infty, -3)$，$(-3, +\infty)$，则有

$$f'(x) = \frac{36(3-x)}{(x+3)^3}, \quad f''(x) = \frac{72(x-6)}{(x+3)^4}$$

驻点：$x = 3$，$f''(x) = 0$的点$x = 6$。

（2）列表。

函数的增减性和极值如表 3.3.1 所示。

表 3.3.1　$f'(x)$、$f''(x)$、$y(x)$ 的增减性和极值

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,+3)$	-3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f'(x)$	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$y(x)$	单增凸	单增凸	极大	单减凸	极小	单增凹

（3）计算几个函数值，如表 3.3.2 所示。

表 3.3.2　函数的 $f(x)$ 值

x	-9	-1	3	6	0	-15
$f(x)$	-8	-8	4	$\frac{11}{3}$	1	$-\frac{11}{4}$

（4）因水平渐近线 $y=1$ 和铅直渐近线 $x=-3$，于是函数 $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形如图 3.3.3 所示。

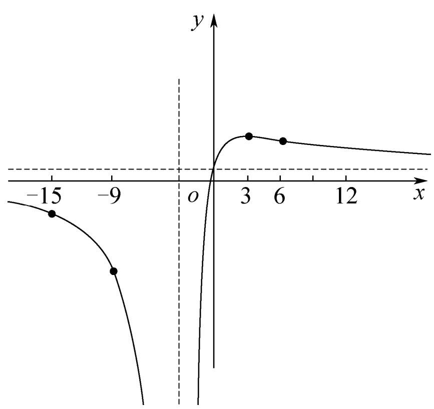


图 3.3.3　$y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的图象

[例 3-3-15] 描绘函数 $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 的图形。

解：（1）函数的定义域：$(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$ 且通过 $(0,0)$，得

$$y'=\frac{x^2(3+x)}{2(x+1)^3},\quad y''=\frac{3x}{(x+1)^4}$$

驻点 $x_1=0,\ x_2=-3,\ f''(x)=0$ 的点 $x_3=0$。

（2）列表。

函数的增减性和极值如表 3.3.3 所示。

表 3.3.3 $f'(x)$，$f''(x)$，$y=f(x)$ 的增减性和极值

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	+	0	+
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+
$y=f(x)$	单增凸	极值	单减凸	单增凸	拐点	单增凹

于是函数 $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 的图形如图 3.3.4 所示。

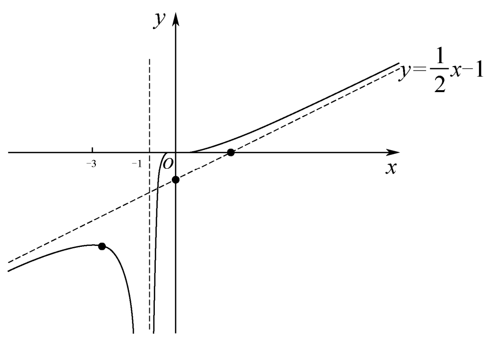


图 3.3.4 $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 的图象

3.3.3 问题探究：美就是真

[例 3-3-16] 比值 $\dfrac{b}{a}$ 为何值时，曲线 $r=a-b\cos\theta$ 是凹曲线 $(a>b>0)$？

[提示] $r'=b\sin\theta,\ r''=b\cos\theta$，令 $\mathrm{G}(\theta)=r^2+2(r')^2-rr''=\mathrm{a}^2+2b^2-3ab\cos\theta$，则当 $\theta=0$ 时，有 $G(\theta)$ 最小值 a^2+2b^2-3ab。要想曲线 $r=a-b\cos\theta$ 是凹曲线，只要 $(a-2b)(a-b)\geq 0$ 即可，而由假定 $a-b>0$，故 $a\geq 2b$。所以当且仅当 $a\geq 2b$ 时，$r=a-b\cos\theta$ 是凹曲线。

[评注] 该曲线的曲率 $k=\dfrac{r^2+2(r')^2-rr''}{(r^2+(r')^2)^{3/2}}$ （见例 3-3-8）。

[例 3-3-17] 方程 $\ln x=a\cdot x$ （其中 $x>0$ ）有几个实根?

方法 1：方程 $\ln x=a\cdot x$ 从几何看表示曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=a\cdot x$ 的交点的横坐标，从图 3.3.5 可看出有三种情况：有两个交点；有一个交点；无交点。

因此，当 $a>1/\mathrm{e}$ 时，方程无实根；当 $a=1/\mathrm{e}$ 时，方程仅有一个实根；当 $0<a<1/\mathrm{e}$ 时，方程有两个实根。

方法 2：将方程 $\ln x=a\cdot x$ 改写为 $\ln x/x=a$，作出函数 $f(x)=\ln x/x$ 的图形来，方程的根等价于求 $f(x)=a$ 的根，即直线 $y=a$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点的横坐标，结论同前。

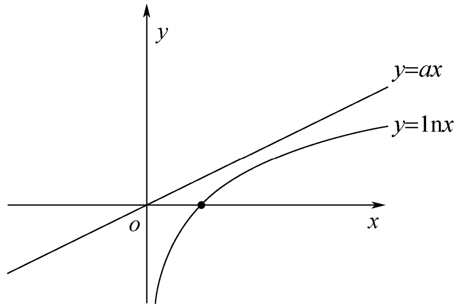


图 3.3.5　$y=\ln x$ 和 $y=ax$ 的图象

[例 3-3-18] 讨论并作曲线 $x=t^2$，$y=3t-t^3$ 的图形。

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3(1-t^2)}{2t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{-3(1+t^2)}{4t^3}$，$t\in(-\infty,+\infty)$，令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，得驻点 $t=\pm1$。

列函数增减性和极值表，如表 3.3.4 所示。

表 3.3.4　函数增减性和极值

t	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
x	$(1,+\infty)$	1	$(0,1)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	+	0	−		+	0	−
$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$	+	+	+		−	−	−
y	单增凹	极小	单减凹	0	单增凸	极大	单减凸

于是曲线 $x=t^2$，$y=3t-t^3$ 的图形如图 3.3.6 所示。

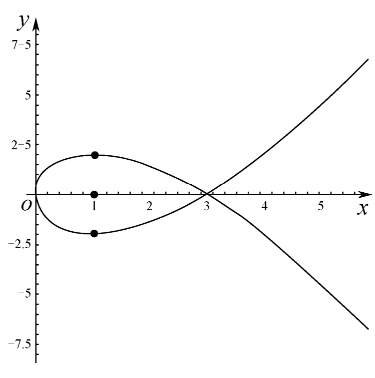


图 3.3.6　曲线 $x=t^2$，$y=3t-t^3$ 的图象

[例 3-3-19] 蜂房秘密：

人们赞美蜜蜂的重要理由是蜂房的精巧构造。古罗马著名修辞学家昆提利安（Quintilian，35—100）说："蜜蜂乃几何学家之首。" 3 世纪末，希腊数学家帕普斯（Pappus，约 300—350 前后）在《数学汇编》第 5 卷序言中，首次谈到蜂房的数学原理。他写道："尽管赋予了人类最好的和最完美的智慧和数学的理解力，但他同时也分一部分给某些无理性的动物，使它们有维持生命的本能……最令人惊叹的是蜜蜂，蜂房是蜂蜜的容器，它是许多的六棱柱形，一个挨一个，中

间没有一点空隙，这种设计的优点是避免杂物的搀入而弄脏了这些纯洁的产品，蜜蜂需要有均匀规则的图案，也就是要等边等角的图形，铺满整个平面区域的正多边形一共只有三种：正三角形、正方形、正六边形。蜜蜂凭着本能的智慧选择了角最多的六边形，因为使用同样多材料，六边形比三角形和正方形具有更大的面积，从而可贮藏更多的蜜。”人的智慧更胜一筹，我们能够研究更一般的问题，知道在周长相等的正多边形中，角越多面积越大，周长相同，面积最大的平面图形是园。正六棱柱的上底是正六边形 $ABCDEF$，下底是 A'、B'、C'、D'、E'、F'。在 BB' 上取一点 G，过 AC 和 G 作平面，在此平面上形成菱形 $AGCQ$，菱形的一个对角线是 AC，另一个对角线是 GQ 两者相交于 P，过 Q 作 $QO\perp$六边形 $ABCDEF$，垂足是 O，四面体 $OACQ$ 和 $BAGC$ 是全等的，将原来的六棱柱切下一个四面体 $BAGC$，安放在 $OACQ$ 的位置上，同样沿另外两个六边形的对角线 AE 和 EC 切下同样大小的四面体，安放在相应的位置，就构成了蜂巢形状，如图 3.3.7 所示。

（1）不管 G 在何处，构成蜂房体的体积和原来的六棱柱一样。

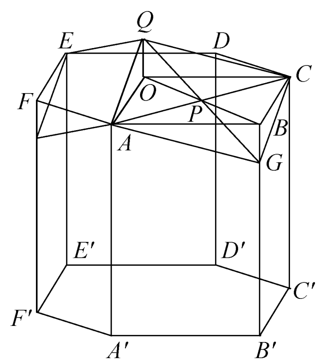


图 3.3.7　蜂房秘密

（2）现问 G 在何处，蜂巢的表面积最小？表面积=菱形◇$AGCQ$ 的 3 倍+梯形□$AA'B'G$ 的 6 倍。

解：设蜂房单元上底是正六边形变长为 $AB=a$，侧面棱长为 $AA'=b$，$BG=x$，则蜂房单元的表面积为

$$f(x)=6ab-6\times\frac{1}{2}ax+6\times\frac{\sqrt{3}a}{4}\sqrt{a^2+4x^2}$$

求导得

$$f'(x)=\frac{3\sqrt{3}a}{2}\frac{4x}{\sqrt{a^2+4x^2}}-3a$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{\sqrt{2}}{4}a$。

由此得 $AG=\frac{3\sqrt{2}}{4}a$，令 $\angle AGC=\theta$，注意到 $AC=\sqrt{3}a$，从而得 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$，$\theta=109^\circ 28'$。

[评注 1] 1712 年，法国天文学家马拉尔迪（Maraldi，1665—1729）通过观测，发现蜂房的每个单元并非正六棱柱，它的底部是由三个菱形板块构成的。他测得菱形的钝角为 $109^\circ 28'$。为什么蜂房会有这样奇特的构造呢？法国科学家雷奥米尔（Reaumur，1683—1757）于 1712 年向多位数学家求教：封底菱形的内角多大时，蜂房单元的容积最大而材料最省？1743 年，英国著名数学家麦克劳林利用微积分方法，得到菱形钝角 $109^\circ 28'$，用被誉为“昆虫世界的诗人

和预言家”的法布尔（Fabre，1823—1915）的话说，就是“昆虫的计算结果与几何学最准确的计算结果完全相符。19 世纪伟大的生物学家达尔文（Darwin，1809—1882）甚至这样说：“凡是考察过蜂巢的精巧构造的人，看到它如此美妙地适应它的目的，而不热烈地加以赞赏，他必定是一个愚钝的人[①]。”

[评注 2] 圆网蛛没有学过对数螺线（其极坐标方程为 $r = ae^{\theta\cot\alpha}$，其中 α 为切线与半径的夹角。瑞士著名数学家雅各布 · 伯努利对该曲线做了深入研究。伯努利发现，对数螺线这条奇妙的曲线在经过放大、缩小等变换后仍为对数螺线；对数螺线的渐屈线和渐伸线仍为对数螺线，极点在对数螺线各点的切线仍是对数螺线，等等），但却能织出优美的对数螺线；同样，蜜蜂也没有学过镶嵌理论，却能造出完美的蜂房！古罗马著名诗人维吉尔（Virgil，公元前 70—公元前 19）说：“蜜蜂乃一束神光。”古希腊历史学家普鲁塔克（Plutarch，46—120）说：“蜜蜂乃美德之化身。”

[评注 3] 求函数 $y = \frac{-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$ 极值的初等方法如下。

方法 1：由 $y = \frac{-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$ 清理根号得出

$$y^2 + xy = \frac{3}{16} + \frac{1}{2}x^2$$

即 $y^2 - \frac{1}{8} = \frac{1}{3}(x-y)^2$。

可知当 $x = y = \frac{1}{\sqrt{8}}$ 时，y 取最小值。

方法 2：令 $2x = \tan\theta$，则

$$y = \frac{-\frac{1}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}\sqrt{3}}{\cos\theta} = \alpha\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} + \beta\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \geq 2\sqrt{\alpha\beta\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = 2\sqrt{\alpha\beta}$$

这里 $\alpha + \beta = \frac{\sqrt{3}}{4}, -\alpha + \beta = -\frac{1}{4}$，不难由此解得答案。

方法 3：命 $2x = t - \frac{1}{4t}\quad (t > 0)$，则

$$\begin{aligned} y &= \frac{-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2} = \frac{-1}{4}\left(t - \frac{1}{4t}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(t + \frac{1}{4t}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{4}t + \frac{\sqrt{3}+1}{4} \times \frac{1}{4t} \geq 2\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \end{aligned}$$

并且知道仅当

$$\frac{\sqrt{3}-1}{4}t = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \times \frac{1}{4t}$$

时取等号，即当

$$4t^2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

① 汪晓勤．数学文化透视．上海：上海科学技术出版社，2013.

而且

$$x=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{4\left(\sqrt{3}+1\right)}\right]=\frac{1}{\sqrt{8}}\text{时，}y\text{ 取最小值}\frac{1}{\sqrt{8}}\text{。}$$

[例 3-3-20] 光学中的（　　）说：在任意两点间，光通过的路线是耗时最小的路线，以此推出折射定理。

（1）费马定理　　（2）拉格朗定理　　（3）泰勒定理

解：答案（1）费马定理。

[评注 1] 折射定理：光线在第一种介质的速率是 v_1，在第二种介质的速率是 v_2，则 A 到 B 的最快途径存在关系 $\sin\alpha/v_1=\sin\beta/v_2$。

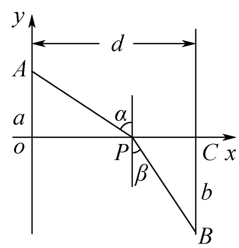


图 3.3.8　费马光学原理

现在，如图 3.3.8 所示，我们假定光线在点 $P(x,0)$ 处进入第二种介质，其入射角与折射角分别为 α 与 β，这时光线在第一种介质中所走的路程为 $\sqrt{a^2+x^2}$，而在第二种介质中所走的路程为 $\sqrt{b^2+x^2}$。这时光线自 A 至 B 所需时间为

$$T(x)=\sqrt{a^2+x^2}/v_1+\sqrt{b^2+(d-x)^2}/v_2$$

令 $T'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\dfrac{1}{v_1}-\dfrac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}\dfrac{1}{v_2}=0$，

即可得

$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\dfrac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}$$

[评注 2] 1684 年，微积分发明者之一—德国数学家莱布尼茨在他的第一篇微积分论文中，给出了微分的一个应用：在两种媒质中分别有点 A 和 B，光从 A 出发到达 B，界面上入射点 P 位于何处，光用时最短？解法见上。有了微积分，一个具有 1500 年漫长历史的古老光学问题，轻而易举地得到了解决。莱布尼茨获此结果后惊叹道：“熟悉微积分的人能够如此魔术般地处理一些问题，曾使其他高明的学者百思不得其解！”

[评注 3] “最小作用量原理”首次由法国数学家、物理学家皮埃尔 · 莫佩尔蒂（Pierre Maupertuis，1698—1759）于 1744 年提出。莫佩尔蒂也是约翰 · 伯努利的学生，约翰在传承学术、培养后人方面功劳不小，至少培养了欧拉和莫佩尔蒂。莫佩尔蒂当时的设想既基于物理学，也或多或少地包含了美学和神学的考虑。

费马原理可以看做光学中的“最小作用量原理”，通过寻求光线路径极值的方法能导出整

个几何光学。在经典力学中，“最小作用量原理”可以表述如下：一个做经典运动的粒子，其实际运动所遵循的规律是要使得它的动能和势能之差的平均值为极值。而莫佩尔蒂则宣称“作用量是质量、速度和路径的乘积的总和，自然规律就是要使这种总和尽可能小”。已故的著名物理学家理查德·费曼（Richard Feynman，1918—1988）将最小作用量原理应用到量子力学，提出了对量子论的一种完全崭新的理解—黎曼路径积分。

“最小作用量原理”表现了自然规律的内在美，如果谈到自然界的外在美，那是与对称密切相关的。例如，1918 年，德国著名女数学家埃米·诺特（Emmy Noether，1882—1935）在题为《变分问题的不变量》的论文中提出了著名的“诺特定理”，揭示出连续对称性与守恒定律之间的联系[①]。

[例 3-3-21] 几何平均与算术平均不等式：设 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 是 n 个任意的非负数，证明

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq(x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

其中，等号成立的条件是当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$。

提示：不妨设每一个 $x_i>0$，令 $k=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}$，$c=x_1x_2\cdots x_{n-1}$，则等价证明

$$f(x_n)=(x_n+k)^n-n^n cx_n\geq 0 \tag{3.3.2}$$

对 n 用数学归纳法，归纳假设

$$k\geq(n-1)c^{\frac{1}{n-1}} \tag{3.3.3}$$

其中，等号成立的条件是当且仅当 $x_1=x_2=x_{n-1}$，将 x_n 换为实变量 x 且不考虑它的正负，计算 $f(x)$ 的一阶、二阶导数，发现 $f(x)$ 仅在

$$x_{\min}=nc^{\frac{1`}{n-1}}-k \tag{3.3.4}$$

处取得极小值，且

$$f(x_{\min})=n^n c[k-(n-1)c^{\frac{1}{n-1}}]$$

由归纳假设式（3.3.3）得 $f(x_{\min})\geq 0$，如果 n 是偶数，则 $x_{\min}$ 是唯一驻点，从而 $f(x_{\min})$ 是最小值；但当 n 是奇数时，$f(x)$ 在某个 $x_{\min}$ 处有唯一的极大值且 $x_{\max}<x_{\min}$，无论哪种情形式（3.3.2）式对非负的 n 总成立。另外 $f(x_{\min})=0$ 的条件是当且仅当式（3.3.3）是一个等式，有归纳假设 $x_1=x_2=x_{n-1}$，于是由式（3.3.4）得到 $x_{\min}=x_n=x_{n-1}$。

[例 3-3-22] 对于 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，比较 $\tan(\sin x)$ 与 $\sin(\tan x)$ 的大小。

解：设 $f(x)=\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，证明 $f(x)>0$。

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}-\frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^3 x-\cos(\tan x)\cdot\cos^2(\sin x)}{\cos^2(\sin x)\cos^2 x}$$

令 $0<x<\arctan\frac{\pi}{2}$，由余弦函数在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的凸性可知

① 张天蓉．数学物理趣谈：从无穷小开始．北京：科学出版社，2015.

$$\sqrt[3]{\cos(\tan x)\cdot\cos^2(\sin x)}<\frac{\cos(\tan x)+2\cos(\sin x)}{3}\le\cos\left(\frac{\tan x+2\sin x}{3}\right)<\cos x$$

最后一个不等式是因为

$$\left(\frac{\tan x+2\sin x}{3}\right)'=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos x\right)\ge\sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\cos x\cdot\cos x}=1$$

这就证明了 $\cos^3 x-\cos(\tan x)\cdot\cos^2(\sin x)>0$, 因此 $f'(x)>0$, 所以 f 在区间 $\left[0,\arctan\frac{\pi}{2}\right]$ 上递增。只需注意到（$4+\pi^2<16$），

$$\tan\left[\sin\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right)\right]=\tan\frac{\pi/2}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}}>\tan\frac{\pi}{4}=1$$

即可完成证明。上式表明，若 $x\in\left(\arctan\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则 $\tan(\sin x)>1$，因此 $f(x)>0$ 。

第 4 章　不定积分

流数（微积分）方法是一把万能钥匙，现代数学家借助它揭开了几何学的秘密，因而也揭开了大自然的秘密。

——贝克莱主教（Bishop Berkeley，1685—1753）/1734 年嘲笑牛顿的无穷小量是“已死量的幽灵”

人是由类人猿进化而来的。

——达尔文（Darwin，1809—1882）/名著《物种起源》（1859 年）的作者

§ 4.1　不定积分：寻找原函数

内容提要：

某些实际问题的解决常常归结到寻求一个函数，使它以某一个已知函数为导数。一般来说，对于给定函数 $f(x)$，求出一个或一族函数，使其导数为 $f(x)$ 的运算称为积分 $f(x)$。因此，如果积分 $f(x)$ 的结果是 $F(x)$，则微分 $F(x)$ 的结果便是 $f(x)$，所以积分是微分的逆运算。

本节主要讲述不定积分（Indefinite Integral）的概念、原函数（Primitive Function）存在定理，用例子说明可导、可积与连续的关系，提及微元法思想和以直代曲思想。

不定积分有两种表现形式，其一是用可变上限的定积分表示（莱布尼茨的原始思想），其二是用原函数（也称反导数）表示（牛顿的原始思想，牛顿求原函数就相当于寻找进化为人的那个生物是什么？），更明确地说，函数 $f(x)$ 的原函数就是将它微分后得到 $f(x)$ 的那个函数。

思想之美：寻找原函数就是把求导函数的过程倒过来。求不定积分（原函数）并不像求微分那样有一定的规律可循，常常要用到附加的变换和技巧，因而是一个困难的工作。然而，它是一种伟大的数学思想创新，正是这种思想创新才成就了积分学的辉煌。

4.1.1　不定积分的物理意义

[例 4-1-1] 研究一个质点的非匀速直线运动，如果知道它在各个时刻的瞬时速度 $v(t)$ $(a\le t\le b)$，要想获得该质点所在位置对时间的依赖关系，便归结为寻求一个函数 $s(t)$ $(a\le t\le b)$，使它的导数恰好等于 $v(t)$。

[提示] 考虑质点在区间 $[a,t]$ 内的运动情况。一方面，分割、求和、取极限及以直代曲（见§5.1），其路程记为 $\int_a^t v(t)\mathrm{d}t$；另一方面，路程为 $s(t)-s(a)$，因此 $\int_a^t v(t)\mathrm{d}t=s(t)-s(a)$。

[评注] $v(t)$ 称为 $s(t)$ 的导数；$s(t)$ 称为 $v(t)$ 的原函数；$v(t)$ 的全体原函数称为 $s(t)$ 的不定积

分，记为$\int v(t)\mathrm{d}t$。

[提示] $s(t)$加一个任意常数C，即为$v(t)$的全体原函数，因此

$$\int v(t)\mathrm{d}t = s(t)+C$$

事实上，利用拉格朗日定理可以证明，如果$v'(t)\equiv 0$，$a\leq t\leq b$，则在区间$[a,b]$上$v(t)\equiv C$（见 3.1.2）。

4.1.2　不定积分

定义 4.1.1　不定积分与原函数：在区间I上给定函数$f(x)$，若存在函数$F(x)$，使得$F'(x)=f(x)$，$x\in I$，或$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，$x\in I$，则称$F(x)$是$f(x)$的原函数。$f(x)$的全体原函数称为$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)\mathrm{d}x$。

[几何解释] 给定曲线$F=F(x)$在每一点的切线的斜率$f(x)$，求该曲线。

[评注 1] 将曲线$F(x)$上下平移得到的曲线$F(x)+C$，均符合要求。存在以下关系：

$\int$	积分号（是一个集值映射）
$f(x)\mathrm{d}x$	被积表达式
$f(x)$	被积函数
x	积分变量
$\int f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$的不定积分（全体原函数）
$f(x)$存在原函数	$f(x)$可积
$f(x)$的原函数曲线	$f(x)$的积分曲线

[评注 2] 原函数作为导函数的对应物（也称反导数）是由瑞士数学家和物理学家欧拉（Euler，1707—1783）在 1774 年引进的。不定积分（也称反微分）的概念是由牛顿与莱布尼茨创建的，现在所呈现的形式归属于欧拉。不定积分的概念有其深刻的力学背景（速度→路程，加速度→速度）及几何背景（斜率→积分曲线）。

定理 4.1.1　原函数存在定理：若$f(x)$在区间I上连续，则$f(x)$一定可积。

[评注] 证明见定理 5.2.1。

1．不定积分的性质

性质 4.1.1：$\int[f(x)+f(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$。

性质 4.1.2：$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$。

性质 4.1.3：$d[\int f(x)\mathrm{d}x]=f(x)\mathrm{d}x$。

2．分项积分法

[例 4-1-2] $\int\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3\mathrm{d}x=a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3+C$。

[例 4-1-3] $\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$。

[例 4-1-4] $\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int\left(\sec^2 x-1\right)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$。

3．凑微分法

[例 4-1-5] $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}\left(\frac{1}{x\ln x}\right) = -\frac{1}{x\ln x}+C$。

[例 4-1-6] $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x}{\left(\frac{x-\ln x}{x}\right)^2} = -\int\left(\frac{x-\ln x}{x}\right)^{-2}\mathrm{d}\left(\frac{x-\ln x}{x}\right)$$

$$=\frac{x}{x-\ln x}+C。$$

[例 4-1-7] $\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{2(\cos x-\sin x)}{1+(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\arctan(\cos x+\sin x)+C。$$

[例 4-1-8] $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$$=2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arctan\sqrt{x}$$

$$=\left(\arctan\sqrt{x}\right)^2+C。$$

4.1.3　问题探究：进化之美

[例 4-1-9] 根据原函数的连续性求不定积分$\int \mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x$。

[提示] 原函数的在$x=0$处连续性，得到

$$\int \mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{e}^{x}+C，& x\geq 0 \\ -\mathrm{e}^{-x}+2+C，& x<0 \end{cases}$$

[例 4-1-10] 举反例：$f(x)$在区间I上不连续，但是可积的。

解：设$F(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)，& x\neq 0 \\ 0，& x=0 \end{cases}$，　$f(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)，& x\neq 0 \\ 0，& x=0 \end{cases}$，

则$F'(x)=f(x)$，但$f(x)$在$x=0$处不连续。

[评注] $F(x)$ 在 $[0,x]$　$(x>0)$ 上应用拉格朗日定理，得 $F(x)-F(0)=F'(\xi)(x>0)$，$0<\xi<x$，即

$$x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=2\xi\cos\left(\frac{1}{\xi}\right)+\sin\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

再令$x\to 0(\xi\to 0)$，请问：哪一个正确？

（1）$\lim\limits_{\xi\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=0$ [左边的极限不存在]。

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=0$ [正确，$\xi=\xi(x)$]。

注意：当 $x\to 0$ 时，$\xi(x)$ 不一定连续地趋向于零。

[例 4-1-11] 换元积分法（见 4.2.1）求不定积分

$$\int\frac{1}{(x-a)^n(x-b)^m}\mathrm{d}x \qquad (m，n\text{ 为正整数，} a\neq b)$$

[提示] 令 $u=\dfrac{x-a}{x-b}$，则 $x-b=\dfrac{b-a}{u-1}$，

$$\int\frac{1}{(x-a)^n(x-b)^m}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^n(x-b)^{m+n}}\mathrm{d}(x-b)=\int\frac{-(u-1)^{m+n-2}}{(b-a)^{m+n-1}u^n}\mathrm{d}u$$

再用分项积分法即可。

我们讲授微积分，是为了希望我们的学生中的一小部分能追随我们对严谨的热爱，还是为了使我们大多数学生将来在他们的专业中有应用微积分的能力？

—— 大卫 · 芒福特（David Mumford，1937— ）/哈佛大学教授、菲尔兹奖获得者

美在于独特而令人惊异，奇异与和谐是对立的统一。数学中出人意料的反例和巧妙的解题方法都令人叫绝，表现出奇异的美，闪耀着智慧的光芒。

—— 弗朗西斯 · 培根（Francis Bacon，1561—1626）/英国哲学家、政治家

§ 4.2　积分法：化归有理

内容提要：

积分法（Integration），即求积分的方法；大多指求不定积分（或原函数）。

按照不定积分的定义，每一个微分式 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 都对应着一个积分式：

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}F(x)=F(x)+C$$

通常将被积分的初等函数 $f(x)$ 按其结构形式，分成若干类型（基本初等函数的简单变形、有理分式、三角函数的有理式、一些根式等）来说明相应的计算过程：许多解析式非常复杂的函数的不定积分可以求出。当原函数不是初等函数因而不能表示成基本初等函数的有限的分析表达式时，便说积分“积不出来”。例如，看上去非常简单的函数的积分

$$\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\quad \int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$$

都“积不出来”(这是奇异之美在不定积分中的表现)。但可以认为这些积分式本身定义了新的超越函数，这些不定积分仍然可以用其他形式表明自身作为原函数的存在性，如

$$\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

按照微积分学基本定理（见 § 5.2），定积分的计算，归结到求不定积分，带上相应的积分限。

例如：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

本节主要介绍求不定积分中常用的凑微分法、换元法及分部积分法。换元的目的就是“有理化”，即通过变量置换把被积函数置换成有理函数的形式。分部积分法是“化归思想”在不定积分法中的具体应用，此方法的关键是将被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 巧妙地凑成 $u\mathrm{d}v$ 的形式，使积分 $\int v\mathrm{d}u$ 的原函数比较容易求出。对于无理函数的不定积分，通常采用三角函数等代换转化为有理函数，利用任意有理真分式都可化为最简真分式之和的事实，再通过变量平移、添拆项及组合积分的基本技巧，可以给出许多简单无理函数的不定积分的简便求解方法。另外，还可利用方程求积分，巧妙利用微分与反微分的关系，化整为零、个个击破。

奇异之美：当微积分创立之后，牛顿-莱布尼茨的积分在很长时间内是无阻的，但当狄利克雷函数（见例 5-1-7）构造出来时，原有的积分就失灵了。这种奇异的现象给积分带来了新的生机，于是有了勒贝格（Lebesgue，1875—1941，法国数学家）积分。再如，计算下列不定积分：

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ \int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x,\ \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x。$$

虽然被积函数相差不大，但是积分的方法大不相同，积分的结果相差甚远。

4.2.1　换元积分法

1．第一换元积分法（也称凑微分法）

已知积分表 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，求 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 的具体过程如下：

$$\begin{aligned}\int g(x)\mathrm{d}x &\overset{\text{凑成}}{=} A\int f[\Phi(x)]\Phi'(x)\mathrm{d}x, && \text{令 } u=\Phi(x)\\ &= A\int f[u]\mathrm{d}u && [\text{利用积分表}]\\ &= AF(u)+C && [u=\Phi(x)]\\ &= AF(\Phi(x))+C && A\text{为常数}\end{aligned}$$

[评注 1] 此过程关键的一步是将被积函数 $g(x)$ 表示成 $Af[\Phi(x)]$ 与 $\Phi'(x)$ 两个因子乘积的形式，即 $g(x) = Af[\Phi(x)]\Phi'(x)$，此时 $\Phi'(x)$ 与 $\mathrm{d}x$ 可以凑成 u 的微分 $\mathrm{d}u(u=\Phi(x))$)，且 $f(u)$ 的原函数比较容易求得。

[评注 2] 凑微分法实际上利用了微分形式的不变性，其核心是逆向构造思想与对称美。通过此类例子可以体验到美在数学中是普遍存在的，问题是要不断地挖掘它、鉴赏它、体验它，从而激起学习数学的兴趣。

[评注 3] 求导与求不定积分的顺序刚好相反（见例 2-2-5），求导时中间变量易看出，但求积分时不易看出，只能通过做典型题目来掌握。

[评注 4] 常用的反微分公式：

（1） $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}\left(ax+b\right)$；　　（2） $x^a\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}\mathrm{d}x^{a+1}(a \neq -1)$；

（3） $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\ln x$；　　（4） $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\arctan x$；

（5） $e^x dx = de^x$ ；　（6） $\cos x dx = d\sin x$ 。

[例 4-2-1] 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$ 。

解：（1）当 $a = 0$ 时，原式= $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

（2）当 $a \neq 0$ 时， $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{-1}{(a-x)(a+x)} dx$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{-1}{a-x} dx + \int \frac{1}{a+x} dx\right) = \frac{-1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \text{。}$$

[例 4-2-2] $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} = +\frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$ 。

[评注] $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{2}{(1 - \tan^2 \frac{x}{2})} d\tan\frac{x}{2}$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C \text{。}$$

2．第二换元积分法（也称变量置换法）

求 $\int f(x)dx$ 的具体过程如下：令 $x = \Phi(t)$，则

$$\int f(x)dx = \int f[\Phi(t)]\Phi'(t)dt = F(t) + C \qquad [t = \Phi^{-1}(x)]$$

$$= F[\Phi^{-1}(x)] + C$$

此处 $t = \Phi^{-1}(x)$ 是 $x = \Phi(t)$ 的反函数。

[评注] 若利用左端积分来求右端积分，即为第一换元积分法；若利用右端来求左端积分，即为第二换元积分法。第二换元积分法的代换 $x = \Phi(t)$ 必须具有单值的反函数，而第一换元积分法无此条件。

[例 4-2-3] 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$ 。

解：令 $x = t^6$ ， $dx = 6t^5 dt$ ，则原式= $\int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = \int \frac{6\left(t^3 + 1\right) - 6}{t + 1} dt$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C \text{。}$$

[例 4-2-4] $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$，$(a > 0)$。

解：令 $x = a\sin t$， $dx = a\cos t dt$，则 $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$，

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + C \text{。}$$

[评注 1] 可以验证： $\left(\frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + C\right)' = \sqrt{a^2 - x^2}$ 。

[评注 2] 如图 4.2.1 所示，利用直角三角形定义求反变换较易。

[例 4-2-5] 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$， $a > 0$ 。

解：倒变换，令 $x=\dfrac{1}{t}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$，

原式$=\int t^4\sqrt{a^2-\dfrac{1}{t^2}}\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

$$=-\int t\sqrt{a^2t^2-1}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2a^2}\int\left(a^2t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(a^2t^2-1\right)=\frac{-1}{3a^2}\left(a^2t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{-1}{3a^2x^3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C。$$

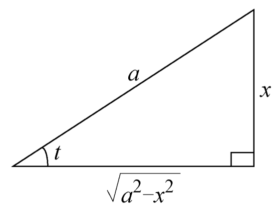


图 4.2.1　利用直角三角形定义求反变换

[评注 1] 处理带根号的问题时，一律按 $\sqrt{x^2}=x$ 进行。

[评注 2] 倒变换也可求其他有理分式的积分，如 $\int\dfrac{1}{x^8(x^2+1)}\mathrm{d}x$。

4.2.2　分部积分法

由乘积微分法则 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$，可得 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$。

[评注] 分部积分法俗称“转嫁积分法”，这是数学中的“化归思想”在不定积分法中的具体应用。此方法的关键是将被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 巧妙地凑成 $u\mathrm{d}v$ 的形式，使原函数 $\int v\mathrm{d}u$ 的原函数比较容易求出。一般来说，当被积函数中有幂函数因子、指数函数因子、对数函数因子、三角函数因子和反三角函数因子时，用分部积分法比较简单。

[例 4-2-6] $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}+\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+C$。

[评注] 当被积函数中有指数函数因子时，可利用指数函数的反微分公式：$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$。

[例 4-2-7] $\int x^2\sin x\mathrm{d}x=-\int x^2\mathrm{d}\cos x=-x^2\cos x+\int\cos x\mathrm{d}x^2$

$$=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\mathrm{d}s=-x^2\cos x+\int 2x\mathrm{d}\sin x$$

$$=x^2\cos x+2x\sin x-2\int\sin x\mathrm{d}x$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$$

[评注] 当被积函数中有三角函数因子时，可利用三角函数的反微分公式：$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$。

[例 4-2-8] $\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\mathrm{d}\ln x=x\ln x-\int x\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$。

[评注] 当被积函数中有对数函数因子时，可利用幂函数的反微分公式：$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$。

[例 4-2-9] $\int x\arctan x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}x^2$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\arctan x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

[评注] 当被积函数中有反三角函数因子时，可利用幂函数的反微分公式：$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$。

[例 4-2-10] 求不定积分$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x\ \left(ab\neq 0\right)$。

解：$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}\sin bx=\frac{1}{b}\left(\mathrm{e}^{ax}\sin bx-\int\sin bx\mathrm{d}e^{ax}\right)$

$$=\frac{1}{b}\left(\mathrm{e}^{ax}\sin bx-a\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x\right)$$

而$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{-1}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}coxbx=\frac{-1}{b}\left(\mathrm{e}^{ax}\cos bx-a\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x\right)$,

解方程，得

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)\mathrm{e}^{ax}+C$$

同理，得

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bxdx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}+C'$$

[评注] 当被积函数同时含中有三角函数和指数函数因子时，可利用反微分公式的一致性和解方程来递归求积分。

4.2.3 有理分式的积分

1．最简真分式的积分

最简真分式是指：

（1）n次多项式，即$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n$。

（2）$\frac{A}{x-a}$。

（3）$\frac{A}{\left(x-a\right)^m}$，$m>1$。

（4）$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$。

（5）$\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}\quad\left(k>1\right)$。

[例 4-2-11] 求不定积分$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$。

解：配方得 $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$。

令 $x+\frac{p}{2}=t$，$\pm a^2=q-\frac{p^2}{4}$，$A=m$，$B=n-\frac{1}{2}mp$，则

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\int \frac{At+B}{t^2\pm a^2}\mathrm{d}t$$

利用积分表 $\int \frac{At}{t^2\pm a^2}\mathrm{d}t=\frac{A}{2}\ln\left|t^2\pm a^2\right|+C$，$\int \frac{B}{t^2+a^2}\mathrm{d}t=\frac{B}{a}\arctan\frac{t}{a}+C$

$$\int \frac{B}{t^2-a^2}\mathrm{d}t=\frac{B}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C$$

因而得到：如果 $p^2>4q$，则

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{m}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2n-mp}{2\sqrt{p^2-4q}}\ln\left|\frac{2x+p-\sqrt{p^2-4q}}{2x+p+\sqrt{p^2-4q}}\right|+C$$

如果 $p^2<4q$，则

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{m}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2n-mp}{2\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

[例 4-2-12] 求不定积分 $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}\mathrm{d}x\quad (k>1)$。

解：凑微分 $Mx+N=\frac{M}{2}\left(x^2+px+q\right)'+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)$，则第一个积分容易求得，第二个积分可利用递归法求得。

[例 4-2-13] $I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^n}$。

解：$I_1=\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$ ；

$$I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^n}\quad \text{(直接利用分部积分法)}$$

$$=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int \frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}。$$

因此，$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{(2n-1)}{2na^2}I_n$。

故由上述公式得

$$I_2=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}+C'$$

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a}+C''$$

2．定理 任意有理真分式一定能化为最简真分式之和。

[例 4-2-14] 将真分式$\dfrac{x+3}{x^3-3x^2+4}$化为最简真分式之和。

解：$\dfrac{x+3}{x^3-3x^2+4}=\dfrac{x+3}{(x+1)(x-2)^2}$

此时分解形式应为

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

两边同乘以$(x+1)$，令$x\to -1$，得

$$A=(-1+3)/(-1-2)^2=\frac{2}{9}$$

两边同乘以$(x-2)^2$，令$x\to 2$，得

$$C=(2+3)/(2+1)=\frac{5}{3}$$

两端乘以x，令$x\to\infty$，得

$$0=\frac{2}{9}+B，\ B=-\frac{2}{9}$$

[评注 1] 也可以用比较系数法求系数A、B及C。

[评注 2] $\dfrac{x+3}{x^3-3x^2+4}=\dfrac{x+3}{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{2}{9(x+1)}-\dfrac{2}{9(x-2)}+\dfrac{5}{3(x-2)^2}$，

因此 $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x+1)(x-2)^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|-\frac{5}{3(x-2)}+C$

[评注 3] 以上定理（任意有理真分式一定能化为最简真分式之和）的证明思路：

（1）若分母$Q(x)=(x-a)^kQ_1(x)$，$Q_1(a)\neq 0$，$k>1$，要证明存在A及$P_1(x)$，使得$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{A}{(x-a)^k}+\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$，即$P(x)=A\,Q_1(x)+(x-a)\,P_1(x)$，取$x=a$，即$A=\dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$。

（2）若分母$Q(x)=(x^2+px+q)^m\,Q_1(x)$，$p^2<4q$，且$Q_1(x)$不含有因子$(x^2+px+q)$，要证明存在$M$、$N$及$P_1(x)$，使得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)}$$

即$P(x)=(Mx+N)\,Q_1(x)+(x^2+px+q)P_1(x)$。

令用x^2+px+q除$P(x)$、$Q_1(x)$的余数分别是$ax+b$，$cx+d$。问题化为确定M与N，使x^2+px+q整除$(ax+b)-(Mx+N)(cx+d)$。以x^2+px+q除此式，得余式

$$[(pc-d)M-cN+a]x+(qcM-dN+b)$$

因此，必须有$(pc-d)M-cN+a=0$且$qcM-dN+b=0$，由此解出M与N，得行列式

$$\begin{vmatrix} pc-d & -c \\ cq & -d \end{vmatrix}=d^2-pcd+qc^2\neq 0$$

当 $c\neq 0$ 时，$d^2-pcd+qc^2=c^2\left[\left(-\dfrac{d}{c}\right)^2+p\left(-\dfrac{d}{c}\right)+q\right]\neq 0$，否则多项式 x^2+px+q 有一实根 $(-d/c)$，不可能；当 $c=0$ 时，d 必非零，否则 $Q_1(x)$ 是 x^2+px+q 的倍数，也不可能。

[评注] $P_1(x)$ 可看做 x^2+px+q 除 $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$ 后所得的商。

4.2.4　万能代换求三角有理函数积分

设 $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=t$，则 $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

[例 4-2-15] 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$。

解：利用万能代换，得

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-t}{(1+t)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{1+t}\mathrm{d}t-\int\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$=2\ln|t+1|-\ln\left(1+t^2\right)+C=\ln|1+\sin x|+C$$

[评注] 用凑微分法最简单：

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+1)}{1+\sin x}=\ln|1+\sin x|+C$$

4.2.5　问题探究：奇异之美

[例 4-2-16] 抽象函数的积分：设 $y=f(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定的隐函数，求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}$。

[提示] 令 $y=t\cdot x$，则 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}$，$y=\dfrac{1}{t(1-t)}$，所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\int\left(3-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{3y}{x}-2\ln\left(\frac{y}{x}\right)+C$$

[例 4-2-17] 三角函数和差化积求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sin(2nx)}{\sin x}\mathrm{d}x$（$n$ 为正整数）。

[提示] $\sin(2nx)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\sin(2kx)-\sin(2k-2)x\right]=2\sin x\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$

$$\int\frac{\sin(2nx)}{\sin x}\mathrm{d}x=2\int\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x\mathrm{d}x=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+C\text{。}$$

[评注] 此题用其他方法难以求得。

[例 4-2-18] 分式有理函数的联合解方程求不定积分

$$F(x)=\int\frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x,\quad G(x)=\int\frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x$$

[评注 1] $F(x)+G(x)=\displaystyle\int\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$。

[评注 2] $F(x)-G(x)=\int\frac{\left(1-x+x^2\right)-x^2}{(1+x)(1-x+x^2)}\mathrm{d}x=\ln|1+x|-\frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|+C$。

[例 4-2-19] 有理函数积分的一题多解求不定积分

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x\quad(a<b)$$

解法 1：凑微分法。$\frac{1}{\sqrt{x-a}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x-a}$，$\sqrt{b-x}=\left(\left(\sqrt{b-a}\right)^2-\left(\sqrt{x-a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x=2\arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\right)+C$$

解法 2：换元法。令$\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}=t$，变为有理函数来做。

解法 3：巧变换。令$x-a=(b-a)\sin^2\theta$，则$b-x=(b-a)\cos^2\theta$，

$$\mathrm{d}x=2(b-a)\sin\theta\cos\theta d\theta$$

原式$=\int\mathrm{d}\theta=2\arctan\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\right)+C$。

[例 4-2-20] 分部积分抵消法求不定积分$\int\frac{\cos x-1}{1+\sin x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$。

[提示] 对$\int\frac{\cos x-1}{1+\sin x}\mathrm{de}^x$分部积分，得

$$\int\frac{\cos x-1}{1+\sin x}\mathrm{de}^x=\frac{\cos x-1}{1+\sin x}\mathrm{e}^x-\int\frac{\cos x-\left(1+\sin x\right)}{(1+\sin x)^2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\cos x-\left(1+\sin x\right)}{(1+\sin x)^2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

而$\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{de}^x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\sin x}+\int\frac{\mathrm{e}^x\cos x}{\left(1+\sin x\right)^2}\mathrm{d}x$，

因此，$\int\frac{\cos x-1}{1+\sin x}\mathrm{de}^x=\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{e}^x+C$。

第 5 章　定积分

微积分是现代数学取得的最高成就，对它的重要性怎样估计也是不过分的。

——冯 · 诺伊曼（John von Neumann，1903—1957）/现代计算机和博弈论之父

数学是地球上最美丽的花朵。

——恩格斯（Engels，1820—1895）/马克思主义创始人之一

§ 5.1　定积分：通过局部把握整体

内容提要：

积分学主要研究积分的性质、计算及其在自然科学与技术中的应用。最基本的概念是关于一元函数的定积分与不定积分，蕴含在定积分概念中的基本思想是通过有限逼近无限。定积分的定义比较完整地概括了积分的思想，也比较深刻地揭示了概念的实质，即难以实际计算，通常是先求函数的不定积分，再用牛顿-莱布尼茨公式来计算出它的积分值。本节主要由曲边梯形的面积与变力做功问题概括出定积分的定义，以理解“化整为零”、“以直代曲”、“积零为整”的思想方法。积分源于面积问题。

数学之美

数学很难，
追求她是艰苦的；
数学很美，
不追求她是遗憾的。
人生，怎能逃避艰苦，
而选择遗憾呢？
本书告诉我们
数学美在何处？[①]

数学的美在于它的简单性、对称性、和谐性、奇异性和原创性。英国理论物理学家狄拉克（Dirac，1902—1984）于 1928 年发现狄拉克方程，通过纯粹数学的手段首次成功预言了正电子的存在，被科学界称为最美的“对称”研究思路。狄拉克因此荣获 1933 年诺贝尔物理学奖。

① [美]李学数．数学和数学家的故事．上海：上海科技出版社，2015.

狄拉克曾说："我和薛定谔（Erwin Schrödinger，1887—1961，奥地利理论物理学家、波动力学的主要创始人之一）都极为欣赏数学美，这种对数学美的欣赏曾支配我们的全部工作。这是我们的一种信念，相信描述自然界基本规律的方程都必定有显著的数学美。"

5.1.1 曲边梯形的面积

[例 5-1-1] 求 $y=x^p$（p是正整数），$x=b$ 及 $y=0$ 所围图形的面积 S_p？

解：解法 1：用牛顿-莱布尼茨公式来求解，即

$$S=\int_0^b x^p \mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^b=\frac{b^{p+1}}{p+1}$$

解法 2：用定积分的思维来求解，即通过局部来把握整体。如图 5.1.1 所示，具体就是将区间$[a,b]$ n 等分，第 k 个等份区间是$\left[\frac{k-1}{n}b,\frac{k}{n}b\right]$，第 k 个小曲边梯形的面积 S_k 满足：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}b\right)^p\cdot\frac{b}{n}\le\sum_{k=1}^{n}S_k\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^p\cdot\frac{b}{n}$$

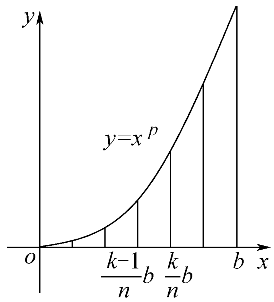


图 5.1.1 曲边梯形的面积

[评注 1] 当 $p=2$，$b=1$时，$S_2=\frac{1}{3}$。

[评注 2]

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^p\cdot\frac{b}{n}=\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\left(\frac{n^{p+1}}{p+1}+c_1n^p+\cdots+c_pn\right)$$ （见例 3-2-11），

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}b\right)^p\cdot\frac{b}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^p\cdot\frac{b}{n}-\frac{b^{p+1}}{n}==\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\left(\frac{n^{p+1}}{p+1}+(c_1-1)n^p+\cdots+c_pn\right)$$。

当n无限增大时，上面两个和数趋于共同的极限值$\frac{b^{p+1}}{p+1}$。这个共同的极限值应该看做所求的面积，即$S_p=\frac{b^{p+1}}{p+1}$。

[例 5-1-2] 曲边梯形的面积的一般化：设$c<a<b$，求在$x=a$，$x=b$之间，x 轴与曲线 $y=f(x)$之间的面积，如图 5.1.2 所示。为方便起见，设$f(x)>0$，并设$F(x)$表在 c，x之间及 x 轴与曲线$y=f(x)$之间的面积。

$$M = \underset{x \le t \le x+\Delta x}{Max} f(t),\quad m = \min_{x \le t \le x+\Delta x} f(t) \tag{5.1.1}$$

考虑面积大小，显然有

$$m\Delta x \le F(x+\Delta x) - F(x) \le M\Delta x$$

也就是说，

$$m \le (F(x+\Delta x) - F(x))/\Delta x \le M \tag{5.1.2}$$

设 $f(x)$ 是连续的，由式（5.1.2）知，当 $\Delta x \to 0$ 时，可知 $F'(x)$ 存在，且 $F'(x) = f(x)$，

即 $F'(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C$，$C$ 是待定常数。

显然，在 $x = a$，$x = b$ 之间的面积等于 $F(b) - F(a)$。

此时记为 $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)|_a^b$，这称为 $f(x)$ 的定积分。

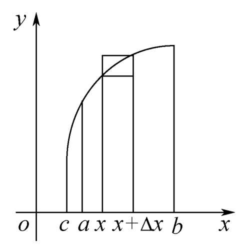


图 5.1.2　定积分示意图

5.1.2　定积分的概念

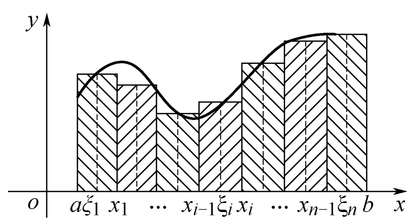


图 5.1.3　定积分的概念

定义 5.1.1：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点，如

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，即 $[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，…，$[x_{n-1},x_n]$，各小区间的长度依次为：

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \cdots,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1},$$

在各小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上取点 ξ，$(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$，做乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$，并做和得

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

令 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots\cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对区间 $[a,b]$ 怎样划分，也不论在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上点 ξ_i 怎样取，只要 $\lambda \to 0$ 时，积 S 总趋向于确定的极限 I，则称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{5.1.3}$$

[评注 1] 式(5.1.3)中右端和式极限有别于数列极限和函数极限的第三类极限，式中 $\lambda \to 0$ 不可用 $n \to \infty$ 来代替。

[评注 2] 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只与被积函数与积分区间有关，与区间的分法、点的取法及积分变量的记号都无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \cdots$$

[评注 3] 定积分的定义可分解为四个部分：分割区间、取点 ξ_i、求和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$、取极限。它体现了“化整为零”、“以不变代变”、“积零为整”、“取极限”的思想方法。

[评注 4] 定积分与导数的区别：两者都属于极限问题，但导数 $f'(x_0)$ 是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 $\Delta x \to 0$ 的极限；而定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 当 $\lambda \to 0$ 的极限；两者虽都是一个数，但导数是在一点处相对于自变量的变化率，是局部概念；而定积分是计算不均匀分布在某区间上的总量，是在一点处相对于整体概念而言的；可导与可积的要求不同，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，但连续不一定可导；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定可积；反之，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一定可导。

[评注 5] $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在的充分条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且有有限个间断点。

[评注 6] $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的多种意义如下。

(1) 代数意义表示：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值是 $\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$。

(2) 几何意义表示曲线 $y=f(x)$，$y=0$，$x=a$，$x=b$ 围成的曲边梯形的面积。

(3) 物理意义是变力 $f(x)$ 沿 x 轴从 a 到 b 做的功为 $W=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

5.1.3　定积分的性质

定理 5.1.1 (积分中值定理)：设 $f(x) \in C[a,b]$，则在 $[a,b]$ 至少存在一点 ξ 使下式成立。

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a),\quad a \le \xi \le b$$

[评注] 请与介值定理、微分中值定理相联系。

[例 5-1-3] 用定积分的定义计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$。

解：用分点 $x_0=a=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ \cdots,\ x_i=\frac{i}{n},\ x_n=b=1$ 将区间 $[0,1]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1]$ $[x_1,x_2],\cdots,\ [x_{n-1},x_n]$，

各小区间的长度依次为 $\Delta x_i=\frac{1}{n},\ i=1,2,\cdots,n$。

在第 i 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上取点 $\xi_i(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$，并做和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$$

$$=\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}\right]\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)\div\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(\mathrm{e}-1\right)\div\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to\mathrm{e}-1$$。

[例 5-1-4] （利用积分中值和积分中值定理求极限）求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$。

[思考] $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\sin^n\xi$，$\left(0<\xi<\frac{\pi}{2}\right)$。

因为$0<\sin^n\xi<1$，$\left(0<\xi<\frac{\pi}{2}\right)$，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\sin^n\xi=0$$

这种做法是不对的，因为此处的ξ与有关，记为ξ_n，当$n\to\infty$时，ξ_n可$\to\frac{\pi}{2}$，$\sin^n\xi_n$未必$\to 0$。

正确的解法如下：

对于任意正数ε，$\left(0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}\right)$，有

$$0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\le\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\times 1$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0$，故取$n$相当大，$\left(\exists N,\ n>N\right)$，可使

$$\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}\frac{\varepsilon}{2}$$

故n相当大$\left(\exists N,\ n>N\right)$时，

$$0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$。

[例 5-1-5] （利用积分性质建立积分不等式）求证：$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\le\int_0^2\mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\le 2\mathrm{e}^2$。

[提示] 求函数$f(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$在区间$\left[0,2\right]$上的最大值和最小值。

[例 5-1-6] （利用泰勒公式建立积分不等式）设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f''(x)<0$，

证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

[提示] 将 $f(x)$ 展开为 $x_0=\frac{1}{2}(a+b)$ 的一阶泰勒公式：

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

ξ 在 x_0 与 x 之间。

当 $f''(x)<0$ 时，$f(x)\le f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$，

两边同积分，整理即得证。

5.1.4　定积分思想的人文价值

定积分的本质用一句话概括就是在“局部地以直代曲”的基础上“积微成著”。定积分的思维方法就是“通过局部把握整体”。

我国数学教育家张奠宙（1933—）先生在其著作《情真意切话数学》（2011 年）中有一段很精彩的论述[①]：“大自然是局部和整体的统一。近看大海汹涌澎湃，远看则风平浪静。宏观地看长江，整体上是‘一江春水向东流’，可是如果局部地看，却是千折百回。整体是由局部构成的，把局部研究透了，自然能够获得更多的整体信息。”

中国台湾蔡志忠（1948—）先生有一篇题为《人生是时间的微积分》[②]也很好地阐述了微积分的人文意义：

开悟的人生像极了微积分的基本精神：“永恒是由无穷多数、无穷小刹那相加而成的”。

人的一生 $=\sum_{\infty}\Delta t$

无穷小刹那就是微分：$\mathrm{d}F(x)=f(t)\mathrm{d}t$

而将这些无穷小刹那相加，就是积分：

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(t)\big|_a^b=F(b)-F(a)$$

无论我们的一生有多长，

它的总长度就是由这些无穷小刹那相加的总和。

如果，

我们不能融入于今日、此时、此地、此刻，

就别提明天会来临。

因为，来临的每一个

明天、明天、明天 ……

都只是当时，

今日、此时、此地、此刻。

① 张奠宙．情真意切话数学．北京：科学出版社，2011.

② 蔡志忠．时间之歌 · 东方宇宙四部曲之二．北京：商务印书馆，2010.

这些构成无穷小刹那中，
无论它是好、坏、净、垢、寒、暑、高、低，
都是整个人生的一部分，
没有哪一部分不是自己。
我们如果排斥忽略它，就是忽略自己的一生。
未悟之前……
鱼儿想飞，
鸟儿想潜水。
开悟之后……
云在晴天，
水在瓶中。
200 年前英国诗人布莱克，
绝对是个开悟之人，
大概他也懂得微积分。
他写了一首悟道心得的好诗：
“一沙一世界，
一花一天堂。
握无穷于掌心，
窥永恒于一瞬。”

5.1.5　问题探究：对称之美

[例 5-1-7] 有界但不可积的反例：狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1，x\text{是有理数}\\0，x\text{是无理数}\end{cases}$$

[提示] 因为不论将 $[0,1]$ 分得多么细，在每个小区间 $f(x)$ 上总能够找到有理数与无理数，若点 ξ_i 都是有理数，则和式 $S=1$；若点 ξ_i 都是无理数，则和式 $S=0$；可见点 $f(x)$ 的不同取法，和式将有不同的极限，所以 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积。

[例 5-1-8] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$。

[提示] 设 $f(x_0)\neq 0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|>\dfrac{|f(x_0)|}{2}>0$，

所以，$\displaystyle\int_a^b f^2\mathrm{d}x \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2\mathrm{d}x \geq \frac{f^2(x_0)}{4}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\mathrm{d}x \geq \delta\frac{f^2(x_0)}{2}$。

所以 $\forall x\in(a,b)$，有 $f(x)=0$，再由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续得 $f(a)=0$，$f(b)=0$。

[例 5-1-9] 计算定积分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x$。

[提示] 如图 5.1.4 所示，x 关于 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 的对称点为 $\dfrac{\pi}{2}-x$，证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\tan x}$ 关于 $y=\dfrac{1}{2}$ 对称，即 $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=1$，$\therefore I=\dfrac{1}{2}$。

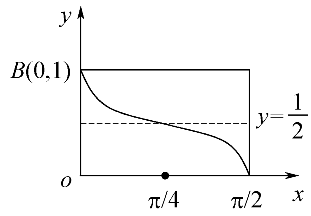


图 5.1.4　$f(x)=\frac{1}{1+\tan x}$

[评注] 几何直观上具有发现的功能, 这种思维既有形象思维的特点, 又有抽象思维的特点。

[例 5-1-10] 欧拉常数。

(1) 利用定积分的几何意义，证明不等式：

$$\frac{1}{n+1}<\ln(\frac{n+1}{n})<\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

[提示] 考虑积分 $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

[评注] 也可对 $f(x)=\ln(1+x)$ 在区间 $[0,x]$ 上用拉格朗日中值定理来证明（见例 3-1-11）。

(2) 令 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n$，$y_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n$。

证明：数列 $\{x_n\}$ 单调上升，而数列 $\{y_n\}$ 单调下降。

(3) 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在（可证此极限值为 0.5772156649…称之欧拉常数)。

[提示] 由 $(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}$，$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>\mathrm{e}$

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n},\quad \frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}<\frac{1}{n-1},\quad n=2,3,\cdots$$

$$\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}<0,\quad \frac{1}{n-1}-\ln\frac{n}{n-1}>0$$

$$\begin{aligned}y_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\left(\ln n-\ln(n-1)\right)-\left(\ln(n-1)-\ln(n-2)\right)\\&\quad-\left(\ln 3-\ln 2\right)-\left(\ln 2-\ln 1\right)\\&=\left(1-\ln\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\ln\frac{n}{n-1}\right)+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}\end{aligned}$$

又 $y_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln(n-1)+\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}\right)<y_{n-1}$，

所以数列 $\{y_n\}$ 单调下降有下界，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在。

[例 5-1-11] $\int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$，$a<b$，$x\in(a,b)$。

[提示] 如图 5.1.5 所示，当动点 R 从 A 移到 B 时，动点 T 的轨迹就是一条半圆曲线，可见积分值就是半圆的面积：$\frac{\pi}{2}(\frac{b-a}{2})^2$。

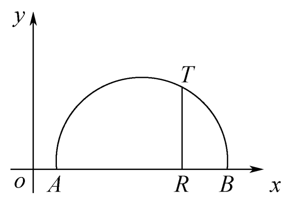


图 5.1.5　$y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$

[例 5-1-12] 证明：$\int_{14}^{25}\frac{4275x^2}{12881}\mathrm{d}x=1425$。

[提示] 用牛顿—莱布尼茨公式比较简单

[例 5-1-13] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$。

解：由于 $\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}$,

所以 $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}<\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{2}{\pi}$$

由夹逼原理推知答案是 $\frac{2}{\pi}$。

[例 5-1-14] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ （1998 年考研试题）。

[思考] 假设 $\ln x$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则可由定积分的定义知所求极限就是 $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=-1$, 但 $\ln x$ 在 $x=0$ 处不连续。

用夹逼原理求解：

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 1\cdot 1+\ln 2\cdot 1+\cdots+\ln n\cdot 1}{n}-\ln n\right)$$

由于

$$\frac{\int_1^n\ln x\mathrm{d}x}{n}-\ln n\le\frac{\ln 1\cdot 1+\ln 2\cdot 1+\cdots+\ln n\cdot 1}{n}-\ln n\le\frac{\int_2^{n+1}\ln x\mathrm{d}x}{n}-\ln n$$

也就是说,

$$-1+\frac{1}{n}\le\frac{\ln 1\cdot 1+\ln 2\cdot 1+\cdots+\ln n\cdot 1}{n}-\ln n\le\frac{(n+1)\ln(n+1)-(n+1)-2\ln 2+2}{n}-\ln n$$

当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{(n+1)\ln(n+1)-(n+1)-2\ln 2+2}{n}-\ln n$ 和 $-1+\dfrac{1}{n}$ 都 $\to -1$

故 $\dfrac{\ln 1\cdot 1+\ln 2\cdot 1+\cdots+\ln n\cdot 1}{n}-\ln n\to -1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=-1$$

只有在微积分学发明之后，物理学才成为一门科学。

——*黎曼（Riemann，1826—1866）/德国数学家、19 世纪的牛顿和爱因斯坦*

一个物理定律必须具有数学美。

——*狄拉克（Dirac，1902—1984）/英国物理学家、量子力学奠基人之一*

§ 5.2　微积分基本定理：局部和整体的完美结合

内容提要：

微积分的基本思想在于考虑函数在小范围内是否可以用线性函数或多项式函数任意近似表示。蕴含在定积分概念中的基本思想是通过有限逼近无限。定积分的定义独立与导数，但是牛顿和莱布尼茨发现了微积分基本定理的显著特性，即连续函数 $f(x)$ 的定积 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 有一个导数，它恰好是同一个函数 $F'(x)=f(x)$。也就是说，$f(x)$ 从 a 到 b 的定积分的值，是以 $f(x)$ 为导数的函数 $F(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 的定积分的差。导数与定积分之间的这种关系被称为“整个微积分的根本思想”。这一公式是函数整体性质和局部性质的完美结合。

原创之美：人类在长期生产实践活动和科学研究中，提出了大量数学问题，其中求曲线的切线和求曲线围成图形的面积是两大类问题，对它们的不断研究最终导致微积分的诞生。多少著名数学家长期在求导数和求积分两种运算之间徘徊，毫无所获。而牛顿以他超人的洞察力发现，这两种运算是互逆的，也就是说，如果函数 $s(t)$ 的导数是 $V(t)$，那么导数 $V(t)$ 在区间 $[t_1,t_2]$ 上的积分等于函数 $s(t)$ 在端点的值差 $s(t_2)-s(t_1)$。这就是微积分的基本定理，后人也称为牛顿-莱布尼茨公式。牛顿-莱布尼茨公式揭示了导数和积分的本质联系。没有微积分的建立和发展，18 世纪以来的科学进展和技术进步都是不可想象的。

5.2.1　微积分基本定理的物理意义

[例 5-2-1] 若已知质点在 t 时刻的瞬时速度为 $V=V(t)$，$(a\le t\le b)$，求质点的路程？

[提示] 一方面，回忆定积分的定义，其路程为 $\int_a^b V(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}V(\xi_i)\Delta t_i$。从形式上看 $V(t)\mathrm{d}t$

是无穷小的微分 $\mathrm{d}t$ 和 $V(t)$ 的乘积，我们将它称为函数的微元，微元的几何意义是函数 $V(t)$ 在 t 处的一个无穷小的微分矩形。将和式 $\sum_{i=1}^{n} V(\xi_i)\Delta t_i$ 取极限，不妨看做无穷小微元 $V(t)\mathrm{d}t$ 的累积，其极限值用符号 $\int_a^b V(t)\mathrm{d}t$ 表示。以微元观点来看定积分，用了许多"无穷小"，尽管不严格，却形神兼备。其中既有被积函数 $V(t)$，积分变元 $\mathrm{d}t$，还有上下积分限，要素都齐了，是经典的简易而清晰的表达。这种朴素的无穷小思考，更是理解微积分局部与整体关系的精髓。

另一方面：路程为 $s(b)-s(a)$，这里 $s'(t)=V(t)$。因此

$$\int_a^b V(t)\mathrm{d}t = s(b)-s(a)$$

[评注] 牛顿和莱布尼茨引入了两个新的数学概念：解决求切线问题的微分和解决求积（即不规则区域的面积）问题的积分。微分与积分互为逆运算。里程表函数的微分就是速度函数 ($s'(t)=V(t)$)；速度表函数的积分就是里程表函数($s(t)=\int_{t_0}^{t} V(t)\mathrm{d}t$)。牛顿是第一个知道微积分基本定理的人（1664—1666），而莱布尼茨是第一个告诉世人微积分存在的人（1684 年），两人都独立地做出了同样的发现。

5.2.2　微积分基本定理及其应用

定理 5.2.1（Newton-Leibniz 公式）：

（1）微分形式。若 $f(x)\in C[a,b]$，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\,(a\le x\le b)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，而且 $F'(x)=f(x)\,(a\le x\le b)$，即 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$。

（2）积分形式。若 $f(x)\in C[a,b]$，且 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$。

[评注 1] 微积分基本定理告诉我们，反映整体性质的积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是由反映局部性质的微分 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 所决定的；若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么 $f(x)$ 在区间 I 上必有原函数。如此定义的函数 $F(x)$ 常常也被称为 $f(x)$ 的不定积分，但和定积分不同的是，它不是由一个无穷数列给出的数值极限，而是一个以 $f(x)$ 为导数的函数。函数 $F(x)$ 也被称为 $f(x)$ 的原函数，$F(b)-F(a)$ 的值通常被视为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的定义。

[评注 2] 牛顿-莱布尼茨公式简称 N-L 公式，它是微积分的核心思想，最初分别由牛顿与莱布尼茨在 17 世纪下半叶独立得到；柯西在 19 世纪初继承并发展了积分作为微元和的思想，并用极限理论定义积分；进一步，柯西利用积分中值定理给出微积分基本定理的证明；德国数学家黎曼在 1854 年给予完善；法国数学家达布在 1875 年给出了这种表达形式。该公式告诉我们，利用原函数（即不定积分）可简便地计算定积分的值。

[评注 3] 从定理 5.2.1 可导出泰勒公式[式（3.2.1）]。

[例 5-2-2] 求 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $[0,b]$ 上的平均值。

解：$\dfrac{\int_0^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{b-0}=\dfrac{\mathrm{e}^b-1}{b}$。

[例 5-2-3]　求极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$。

解：$L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+(1/n)^2}+\dfrac{1}{1+(2/n)^2}+\cdots+\dfrac{1}{1+(n/n)^2}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}。$$

[例 5-2-3] 微元法求面积。如图 5.2.1 所示，记抛物线 $y=-x^2+1$ 的图象与 x 正半轴的交点为 A，则抛物线 $y=-x^2+1$ 与两坐标轴所围成的图形在第一象限的面积为多少？

[提示] $\int_0^1\left(-x^2+1\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}$。

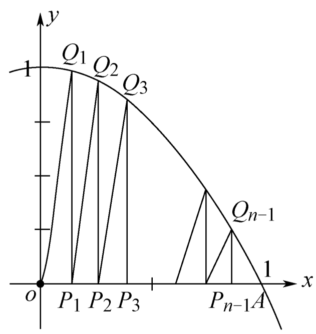


图 5.2.1　$y=-x^2+1$

[例 5-2-4] **分部积分法**：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，证明

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x$$

[提示] $\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}f'(x)=x(1-x)f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(1-2x\right)f'(x)\mathrm{d}x$，

$$\int_0^1(1-2x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-2x\right)\mathrm{d}f(x)=\left(1-2x\right)f(x)\Big|_0^1+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x。$$

[评注] 分部积分法：$\int_a^b y\mathrm{d}x=xy\Big|_a^b-\int_{y(a)}^{y(b)}x\mathrm{d}y$。　　(5.2.1)

在图 5.2.2 中，式（5.2.1）在几何上的正确性是显尔易见的，因为 $\int_a^b y\mathrm{d}x$ 是所有纵向条形区域的面积，而 $\int_{y(a)}^{y(b)}x\mathrm{d}y$ 是所有横向条形区域的面积，这两部分面积的和显然是外围矩形和左下方小矩形面积之差。也就是说

$$\int_a^b y\mathrm{d}x+\int_{y(a)}^{y(b)}x\mathrm{d}y=by(b)-ay(a)$$

整理后即得式（5.2.1）。

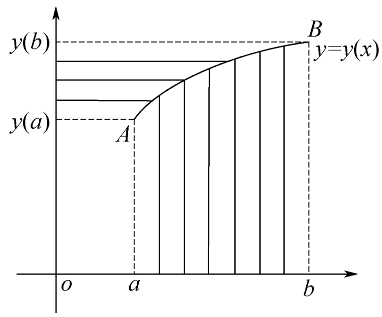


图 5.2.2　分部积分法示意图

5.2.3　积分变上限函数

定理 5.2.2：设 $f(x)\in C[a,b]$，则积分变上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 具有如下性质。

（1）$\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

（2）$\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$。

（3）$\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

[评注 1] 若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 一定存在原函数。

[评注 2] $\Phi(x)$ 若为变下限函数，则其导数等于 $-f(x)$。

[评注 3] $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$\int f(x)\mathrm{d}x$ 三者的区别与联系：$\int f(x)\mathrm{d}x$ 是函数族 $F(x)+C$，$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 是函数族中的一个确定的函数 $F(x)-F(a)$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是函数族中的任意一个函数在区间 $[a,b]$ 上的增量，也是函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=b$ 处的函数值。

[例 5-2-5] 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$。

解：应用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{e}^{-\cos^2 x}(-\sin x)}{2x}=\frac{1}{2}$$

[例 5-2-6] 设 $f(x)\in(-\infty,+\infty)$，且 $f(x)>0$，证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是增函数。

证明：

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

因为 $f(x)>0$，$x-t\geq 0\quad(0\leq t\leq x)$，所以

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t > 0, \int_0^x (x-t) f(t)\mathrm{d}t > 0$$

故 $F'(x) > 0 \quad (0 < x < +\infty) \Rightarrow F(x)\uparrow$。

[评注] $x=0$ 是 $F(x)$ 的可取间断点，因为当 $x \to 0$ 时，$F(x) \to 0$。

5.2.4 问题探究：变换之美

[例 5-2-7] 若 $x\sin\pi x = \int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$，$f(x)$是连续函数，求$f(4)$。

[提示] 利用变上限函数性质。

答案：$f(4) = \dfrac{\pi}{2}$。

[例 5-2-8] 计算定积分 $I = \int_{-1}^1 \dfrac{x^2}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。

[提示] 定积分的换元积分法：令 $x=-t$，则 $2I = I + I = \int_{-1}^1 t^2\mathrm{d}t$，从而 $I = \dfrac{1}{3}$。

[例 5-2-9] 设 $f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的可微函数，且 $0 < f'(x) \leqq 1$，$f(0)=0$，证明：

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqq \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

[提示] 利用微分中值定理证明积分不等式。为此做辅助函数 $g(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x)$，则 $g'(x) \geqq 0$，所以 $g(x) \geqq 0$。

令 $F(x) = \left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)^2$，$G(x) = \int_0^x f^3(x)\mathrm{d}x$。

利用柯西中值定理，有 $\dfrac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)} \geqq 1$ 即可证明。

[例 5-2-10] 设 $f(x)$ 处处二阶可导，且 $f''(x) \geqq 0$，又 $u(t)$ 为任意连续函数，证明：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqq f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right] \quad (a>0)$$

[提示] 利用泰勒中值定理，得

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$，$\xi$ 在 x 与 x_0 之间。

取 $x_0 = \dfrac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$，$x = u(t)$ 代入，并利用 $f''(x) \geqq 0$ 即可证明。

[例 5-2-11] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(n^2+k^2\right)^{1/n}$（第 31 届普特南数学竞赛试题，1970 年 12 月 5 日）。

[提示] 令 $a_n = \dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(n^2+k^2\right)^{1/n}$，则 $\ln a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{2n}\ln\left(1+\dfrac{j^2}{n^2}\right)$。

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{2n}\ln\left(1+\dfrac{j^2}{n^2}\right) = \int_0^2 \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x = 2\ln 5 + 2\arctan 2 - 4$。

[例 5-2-12] 设 $0<a<b$，证明 $\int_a^b \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \geqq \mathrm{e}^{-a^2} - \mathrm{e}^{-b^2}$（第 17 届国际大学生数学竞赛试题，保加利亚，2010）。

解法 1：设 $f(x) = \int_a^x \left(t^2+1\right)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，$g(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$，

这两个函数都是递增的。由 Cauchy 中值定理知，存在实数 $x\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}}{2x\mathrm{e}^{-x^2}}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=1。$$

解法 2：$\int_a^b(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\geq\int_a^b 2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x^2}\right]\Big|_a^b=\mathrm{e}^{-a^2}-\mathrm{e}^{-b^2}$。

[例 5-2-13] Euler-Poisson 积分①：

$$K=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

这是概率论中常用的积分。

解：假定 $x\neq 0$。由

$$1+x^2<1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots=\mathrm{e}^{x^2}<1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

前者仅对 $0<x<1$ 正确，而后者对任一 $x>0$ 都对。由此得

$$(1-x^2)^n<\mathrm{e}^{-nx^2}\ (0<x<1)$$

$$\mathrm{e}^{-nx^2}<\frac{1}{(1+x^2)^n}\quad(x>0)$$

两边取积分 $\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x<\int_0^1 e^{-nx^2}\mathrm{d}x<\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x<\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$，

但用替换 $t=\sqrt{n}x$ 可得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{n}}K$$

又　$\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\mathrm{d}t=\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot(2n-2)(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot(2n+1)}$，

$$\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t\mathrm{d}t=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot(2n-2)}\frac{\pi}{2}$$

所以 $\sqrt{n}\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot(2n-2)(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot(2n+1)}<K<\sqrt{n}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot(2n-2)}\dfrac{\pi}{2}$。

平方之，即得

$$\frac{n}{2n+1}\frac{\left(2\cdot4\cdot6\cdot(2n-2)(2n)\right)^2}{\left(1\cdot3\cdot5\cdot(2n-1)\right)^2(2n+1)}<K^2<\frac{n}{2n-1}\frac{\left(1\cdot3\cdot5\cdot(2n-3)\right)^2(2n-1)}{\left(2\cdot4\cdot6\cdot(2n-2)\right)^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

由 Wallis 公式（见例 1-3-11）：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right]^2=\frac{\pi}{2}$$

① 华罗庚．高等数学引论（第一册）．北京：高等教育出版社，2009.

可知，当$n\to\infty$时，$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\leq K^2\leq\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\Rightarrow K=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

因此，$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

[评注] 拉格朗日的学生、法国数学家泊松（Sime' on-Denis Poisson，1781—1840）给出了他的简捷算法：

$$\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}。$$

[例 5-2-14] 设n为自然数，计算定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\left(1+2^x\right)\sin x}\mathrm{d}x$（第 3 届国际大学生数学竞赛试题，保加利亚，1996)。

解：$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\left(1+2^x\right)\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\left(1+2^x\right)\sin x}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{\left(1+2^x\right)\sin x}\mathrm{d}x$，

在第二个积分中，利用变量替换$x=-t$得到

$$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\left(1+2^x\right)\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\left(1+2^x\right)\sin x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{\left(1+2^{-t}\right)\sin t}dt$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\left(1+2^x\right)\sin nx}{\left(1+2^x\right)\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x。$$

对于$n\geq 2$，有

$$I_n-I_{n-2}=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx-\sin(n-2)x}{\sin x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\cos\left(n-1\right)x\mathrm{d}x=0$$

因为$I_0=0$，$I_1=\pi$，所以当n为偶数时，$I_n=0$；当n为奇数时，$I_n=\pi$。

[例 5-2-15] 求无穷级数的和：

$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}+\cdots$（第 11 届普特南数学竞赛试题，1951 年 3 月 31 日）。

解：首先证明

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}+\cdots=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

事实上，对任何$t\neq-1$有

$$\frac{1}{1+t^3}=\sum_{n=1}^{k}\left(-1\right)^{n+1}t^{3n-3}+\frac{\left(-1\right)^k t^{3k}}{1+t^3}$$

从 0 到 1 积分得

$$\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t-\sum_{n=1}^{k}\left(-1\right)^{n+1}\int_0^1 t^{3n-3}\mathrm{d}t=\left(-1\right)^k\int_0^1\frac{t^{3k}}{1+t^3}\mathrm{d}t$$

因此，$\left|\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t-\sum_{n=1}^{k}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{3n-2}\right|=\left|\int_0^1\frac{t^{3k}}{1+t^3}\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1 t^{3k}\mathrm{d}t=\frac{1}{3k+1}$。

令$k\to\infty$便得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

这个积分可用有理分式积分法（见 4.2.3）计算如下：

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}&=\frac{1}{3}\int_0^1\left[\frac{1}{1+t}+\frac{2-t}{1-t+t^2}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{3}\left[\ln(1+t)-\frac{1}{2}\ln\left(1-t+t^2\right)+\sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1\\&=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

[例 5-2-16] 从万有引力定律推导开普勒第三定律。

开普勒第三定律揭示的是，任何行星公转的时间的平方，与它到太阳的平均距离的立方成正比例。这个定律写成一个公式，就是$T^2=kD^3$，此处 T 是行星年的长度（即公转的时间），而D是行星到太阳的平均距离，k是常数，也就是说，它对所有的行星都相同。

事实上，一个圆周上运动的物体受某种力的作用，使该物体偏离由牛顿第一运动定律所确立的应遵从的直线运动。这个力经常称为向心力，其大小由公式$F=\dfrac{mv^2}{r}$给出，此处m是物体的质量，v是其速度，r是圆周半径。这种作用在行星上的力，就是太阳的引力。假设行星以恒速在一个圆周上运动，那么它的速度就由圆周长除以公转的时间给出，$v=\dfrac{2\pi r}{T}$。由于这个向心力 F 起因于太阳所施加的引力，而太阳的质量可以记为M，因此有$F=\dfrac{kmM}{r^2}$。比较$F=\dfrac{m}{r}\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2$与$F=\dfrac{kmM}{r^2}$得$T^2=\dfrac{4\pi^2}{kM}r^3$，这个结果就是开谱勒第三定律。

[评注] 从开普勒第三定律推导万有引力定律见导言中的微积分在天体力学中的应用。

[例 5-2-17] 设$y=f(x)(x\geq 0)$连续可微，且$f(0)=1$，现已知曲线$y=f(x)$、x轴、y轴及过点$(x,0)$且垂直于x轴的直线所围成的图形的面积与曲线$y=f(x)$在$[0,x]$上的一段弧长值相等，求$f(x)$。

解：设所围图形的面积为$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，弧长为$\int_0^x\sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}\mathrm{d}t$，

因而

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}\mathrm{d}t$$

两端对x求导得

$$f(x)=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\int\mathrm{d}x\Rightarrow\ln C\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)=\pm x$$

将$y\big|_{x=0}=1$代入上式得$C=1$，故所求的解为$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$（即为悬链线，见例 1-1-1）。

[例 5-2-18] 设$f(x)=2x(1-x)$，$x\in\mathbf{R}$，定义$f_n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}$。

（1）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(x\right)\mathrm{d}x$。

（2）计算 $\int_0^1 f_n\left(x\right)\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$（第 5 届国际大学生数学竞赛试题，保加利亚，1998）。

解：

（1）取定 $x=x_0\in\left(0,1\right)$，设 $x_n=f_n\left(x_0\right)$，$n=1,2,\cdots$，容易看出 $x_1\in\left(0,1/2\right]$，$x_1\le f\left(x_1\right)\le 1/2$，$x_n\le f\left(x_n\right)\le 1/2$，$\{x_n\}$ 是非减有上界的数列，所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$ 满足 $l=2l\left(1-l\right)$，因此 $l=1/2$，由单调收敛定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}。$$

（2）用归纳法证明

$$f_n\left(x\right)=\frac{1}{2}-2^{2^n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2^n},n=1,2,\cdots \tag{5.2.2}$$

因为 $f(x)=2x(1-x)=\dfrac{1}{2}-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$，所以 $n=1$ 时，式（5.2.2）成立。

若 $n=k$ 时式（5.2.2）成立，则有

$$\begin{aligned}f_{k+1}\left(x\right)=f_k\left(f\left(x\right)\right)&=\frac{1}{2}-2^{2^k-1}\left(\left(\frac{1}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{2}\right)^{2^k}\\&=\frac{1}{2}-2^{2^{k+1}-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}\end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时式（5.2.2）成立。

利用式（5.2.2），可以计算积分

$$\int_0^1 f_n\left(x\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x-\frac{2^{2^n-1}}{2^n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2^n+1}\right]_{x=0}^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\left(2^n+1\right)}$$

5.2.5 自然科学家的偶像和样样皆通的大师

1．猜人名：自然科学家的偶像

[提示 1] 他在建立经典物理体系过程中，启用了从古至今最重要的数学创造——微积分。正如 20 世纪伟大物理学家爱因斯坦所说：“只有这种方法才能为他提供表达他的思想的工具。”由于微积分和其他一系列重要的数学发现，使他和阿基米德、高斯并称为历史上最伟大的数学家。

[提示 2] 发表于 1687 年出版的《自然哲学之数学原理》一书不仅包罗当时力学研究的全部成就，清楚地给出了力学三定理和万有引力定律，而且将力学理论通过严密的数理逻辑，建立在哲学思维和科学实验的基础上，形成了完备的体系，为物理学甚至整个自然科学的发展，树立了榜样、建立了楷模。

[提示 3] 英国的数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家，他曾说过“如果说我比别人看得远些，那是因为我站在巨人们的肩上”，他是 17 世纪科学革命的伟大旗手，他关于白光由色光组成的发现为物理光学奠定了基础。

[答案] 艾萨克 · 牛顿（Issac Newton，1642—1727）

[评注] 牛顿在世的时候就成为自然科学家的偶像，受到全球学子的崇拜。他是英国国会议员、在皇家学会连任 24 年的终身会长、在巴黎科学学院尊贵的外籍院士，还曾任英国造币厂督办、总监。安妮女王亲临剑桥，封他为爵士。一份署名日期为 1665 年 5 月 20 日的手稿表明，牛顿在 23 岁时已充分发展了微积分的主要原理，能够用它找出任何连续曲线在任何给定点的切线和曲率。在他的手稿上描述了他的“流数术”（用“ $\dot{x}$ ”表示 x 对时间的导数，称为流数），实质上就是现代微积分的思想。因此，后人把这一天作为微积分的诞生日。

2．猜人名：样样皆通的大师

[提示 1] 他集数学思想的两个宽广的、对立的领域（分析和组合，或连续和离散）中的最高能力于一身，这是前无古人后无来者的。他是数学史上唯一一个在思维的这两个方面都具有最高能力的人。他终生奋斗的主要目标是寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法，这种努力导致许多数学的发现，最突出的就是微积分学（1676 年）。牛顿建立微积分学主要是从运动学的观点出发，而他则从几何学的角度去考虑。

[提示 2] 1673 年，他发明了一个远比帕斯卡（Pascal，1642—1644）的机器优越的计算机器，帕斯卡的机器只能做加法和减法；他的计算机器除加减法外，还能做乘法、除法和开方，因此被选为英国皇家学会外籍会员，后来（1700 年）他和牛顿成为法国科学院的第一批外籍院士。他还系统地阐述了二进制计数法，并把它和中国的八卦联系起来。

[提示 3] 1686 年发表第一篇积分学论文，并创用“ $\int f(x)\mathrm{d}x$ ”这一简洁的符号表达了积分概念的丰富思想，刻画出“人类精神的最高胜利”，因此有数学家将微积分比做“美女”。1674 年他发现：如果 π 是圆的周长与直径之比，那么级数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

以同样的规律无穷继续。这不是一个计算 π 的数值的实用方法，但是 π 和所有奇数之间的这种简单的联系颇引人注目。

[答案] 德国的威廉 · 莱布尼茨（Wilhelm Leibniz，1646—1716）。积分的符号，首先由莱布尼茨在 1675 年使用拉长了的“ S ”来表示，它代表“Sum”（和）。

[评注 1] 牛顿成了英国的民族英雄，并于 1727 年葬于威斯敏斯特大教堂——历代君主的长眠之所。而莱布尼茨虽然在科学与哲学上都多有建树，但却不被自己的祖国所承认。1716 年他离世时被安葬在一座没有标记的坟墓之中。

1684 年 10 月，莱布尼茨在《学艺》上发表了论文《一种求极大极小与切线的新方法》，虽然这篇论文只有六页，内容并不丰富、说明也颇含糊，但却是最早的微积分文献。如果追溯笔记本上的记录的话，莱布尼茨是在 1675 年建立了微积分，比牛顿的笔记本记录晚了 10 年左右，但莱布尼茨早于牛顿 3 年在期刊上发表了他的研究成果。

“通才”毫不夸张地适用于莱布尼茨，却不适用于他在数学方面的竞争者、在自然哲学上无可比拟的优胜者——牛顿。

[评注 2] 微积分发明权之争。17 世纪，英国的数学家与欧洲大陆的其他国家的数学家之间发生了一场激烈的论战，论战的主题是谁先发明了微积分。论战所涉及的核心人物一边是科学泰斗牛顿，另一边是德国的哲学及数学家莱布尼茨。这场论战大伤和气，还留下了旷日持久的后遗症。与此同时，英国数学界的集体荣誉及尊严、牛顿的赫赫威名便都成了负资产，英国的数学在保守的舞步中走起了两百年的下坡路。

后来，经过历史考证，莱布尼茨和牛顿使用的方法和途径均不一样，对微积分的贡献也各有所长。牛顿注重微积分与运动学的结合，发展完善了“变量”的概念，为微积分在各门学科的应用开辟了道路。莱布尼茨则从几何出发，发明了一套简明方便、使用至今的微积分符号体系。因此，如今学术界将微积分的发明权判定为他们两人共同所有。

[评注 3] 如图 5.2.3 所示，莱布尼茨在求面积过程中，通过无穷级数得到了π的一个十分漂亮的表达式：

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[xy\Big|_0^1 + \int_0^1\left(y - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot x\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{2x-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1\sqrt{\frac{x}{2-x}}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{d}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\right) \\
&= 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}\mathrm{d}z \quad \left(z = \sqrt{\frac{x}{2-x}}\right) \\
&= 1 - \int_0^1 z^2\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots\right)\mathrm{d}z \\
&= 1 - \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9 + \cdots\right)\Bigg|_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots
\end{aligned}$$

注意：用 $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7} + \cdots$ 表示π，要比上面这个级数收敛快得多（见例 3-2-15）。

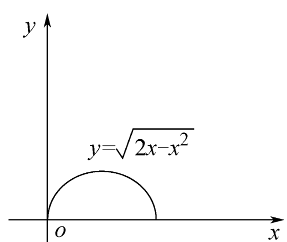


图 5.2.3　$y = \sqrt{2x - x^2}$

[评注 4] 法国是一个注重数理演绎、具有数理科学传统的国家。在微积分的两位“祖师爷”——牛顿和莱布尼茨吵得不可开交的时代里，牛顿的威望很高，但在微积分理论被完善发展的年代，却大多数是莱布尼茨的门徒们的功劳，如瑞士的雅各布 · 伯努利和约翰 · 伯努利，他俩都是莱布尼茨的学生。后来约翰的学生欧拉、约翰的儿子丹尼尔 · 伯努利以及法国的达朗贝尔、欧拉的学生拉格朗日、达朗贝尔的学生拉普拉斯、拉格朗日的学生傅里叶和泊松……都是莱布尼茨一脉相承的后继之人。相形之下，牛顿有出息的门徒甚少，颇似孤家寡人。

不过，傅里叶的工作对英国人乔治 · 格林（George Green，1793—1841）的影响很大，格林把数学分析应用到静电场和静磁场现象的研究中。之后又有哈密顿（Hamilton, 1805—1865）、斯托克斯、威廉 · 汤姆孙（William Thomson，1824—1907）等科学家的出现，剑桥学派的崛起

为英国人争了一口气，扳回了战局。

格林定理 $\left(\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A=\oint_c P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right)$ 的实质就是微积分基本定理 $\left(\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\right)$ 在二维中的推广（即把平面上的二维积分转换成一维边界上的积分）。斯托克斯定理 $\left(\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_\Sigma \mathrm{d}\omega\right)$ 描述的是矢量场对曲面的表面积分等于该矢量场沿着表面边界的曲线积分。

5.2.6　微积分传入中国之简史

中国早在远古就已有微积分概念的萌芽。在古代，中国数学长期保持着世界先进水平。在 17 世纪，欧洲数学开始传入中国，到清康熙帝（1654—1722）时达到极盛。但在康熙帝死后，雍正帝在 1723 年下令，除留少数外国人在北京钦天监供职外，把其余外国人都安置在澳门，于是中外数学交流暂时中断，从而微积分学传入中国推迟到鸦片战争以后。

1859 年，英国传教士、著名汉学家亚历山大 · 伟烈（Alexander Wylie，1815—1887）和清朝末年中国最杰出的数学家李善兰（1811—1882）合作翻译的微积分著作《代微积拾级》（如将“ limit ”翻译为极限，中国第一本微积分教材）在上海墨海书局出版，这是西学东渐历史上的重大事件。《代微积拾级》（其内容涉及今之解析几何，以及微分学和积分学三大部分）的英文原版作者是美国数学家罗密士（Loomis，1811—1889），他是纽约市立大学自然哲学和数学教授，后来出任耶鲁大学自然哲学教授。《代微积拾级》的出版是中国数学史上有特殊意义的事情，它不仅标志着西方近现代数学开始在中国传播，还预示着中国传统数学即将成为历史研究的对象。到 2019 年，微积分传入中国即满 160 周年，中国数学家在许多领域已做出了杰出贡献，2002 年在北京召开的世界数学家大会就是很好的说明。

5.2.7　简洁美的范例：广义斯托克斯公式

用现代数学的外微分形式得到的广义斯托克斯公式

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$$

这里，ω 为外微分形式，$\mathrm{d}\omega$ 为 ω 的外微分，Ω 为 $d\omega$ 的积分区域，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，$\int$ 表示区域有多少维数就是多少重数。只用几个符号，却把微积分中的牛顿-莱布尼茨公式、格林公式、高斯公式、斯托克斯公式这一系列的基本公式都作为其简单特例而统一起来了。广义斯托克斯公式内容极其丰富，它适用于任何高维的空间和一般的流形，而其形式又特别简单，成为追求简洁美的范例。

在高维空间中，广义斯托克斯公式就是高维空间的微积分基本定理。这个公式说明，高次的外微分形式 $\mathrm{d}\omega$ 在区域上的积分等于低一次的外微分形式 ω 在区域的低一维空间的边界上的积分。外微分运算与积分起到了相互抵消的作用，就像加法与减法、乘法与除法、乘方与开方相互抵消一样。在一维空间中，这就是微积分基本定理（牛顿-莱布尼茨公式）

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$$

此时，Ω 为直线段$[a,b]$，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，这时就是端点 a 与 b，$\mathrm{d}\omega$ 就是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x$。

5.2.8 有限与无限

物质、运动、时间、空间从理论方面来说均是有限与无限对立统一。英国诗人艾略特（Eliot, 1888—1965）说过："个人的才智有限，文化的力量无穷。"

有限与无限的区别：连续函数在任何有限区间上均可积，但不能在无限区间上也是可积的；一元函数极限、多元函数的极限差别很大；有限四则运算不一定对无限适用。

有限与无限的联系与转化：数学中从有限发展到无限是认识上的深化；极限概念是对变量过程的无限性的恰当描述；通过有限可以进一步认识无限，如泰勒公式等。

定积分应用中的**奇异美**：由双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在 $x\geq 1$ 的部分绕 x 轴旋转所得到的旋转曲面称为加百利（Gabriel）喇叭，利用积分法能证明这个喇叭所围成的体积是有限的，而它的表面积是无限的。直观地说，我们可以用有限的涂料把喇叭填满，却不能用足够的涂料把它的表面涂满。这个结论完全违背直观，却可令人信服地证明①。

5.2.9 微积分之歌②

欧氏几何，理性之舟；
微积分学，文明之光。

1．整体和局部

在实数系的舞台上，
变量，曲线，函数，陆续登场。
极限，穿过"无限"的隧道，
让"微积分"魅力四射，锐不可当。
人们首先看到"区间上函数"的整体性质：
单调，最大最小，总的变化量；
不过，数学先贤们更关注函数在一点的局部状态：
切线斜率，瞬时速度，
那才是"变量数学"的新篇章。
一部微积分，从整体到局部，
再从局部回到整体，
新的思维，新的疆场！

2．超越悖论

"说时迟，那时快"，
大家提起瞬时速度，本来十分平常。
可是古希腊的芝诺争辩说，"飞矢不动"呵，
一支箭在某一具体时刻只能在一个地方！

① [美]克利福德 · 皮寇弗．数学之书．陈以礼译．重庆：重庆大学出版社，2015.
② 张奠宙，王善平．数学文化教程．北京：高等教育出版社，2013.

如果物体在某一具体时刻根本没有动，
谈某时刻的瞬时速度，岂不是无根据的瞎想？
且慢，一旦我们关注函数的局部性质；
就能跨越悖论，翻过高墙！
听说过“近朱者赤，近墨者黑”的谚语吗？
意思是说不要孤立地看一个人，
而是要考察他所处的局部环境，周围状况；
研究运动物体的瞬时速度，
何尝不是这样？
运动物体在某一个时刻固然没有动，
但考察前前后后的微小局部，
就会豁然开朗。
极限，正是极限，化解了芝诺悖论的迷茫。

3．微分

东方智慧中有“一尺之棰”的故事，
西方典籍里记载着“穷竭法”的思想。
笛卡儿创立了解析几何，
终于可以用坐标系把函数画在纸上。
“行到水穷处，坐看云起时”。
平均变化率的极限尽头，
就是导数和微商。
“无穷小量”，
“微分”魔杖；
牛顿创立的“流数术”，
攻关解难，万事流芳。

4．“中值定理”

局部和整体，
好像两座高山，隔江相望。
18 世纪的拉格朗日，
用导数在中值ξ（克希）的局部，
描述了两端的整体变化量。
一桥飞架，和谐流畅！
有了它，判别函数的单调性，找最大值
简直易如反掌。
如果说微积分是一部交响曲，
中值定理就是其中的梦幻乐章。

5．积分

遥想当年，
阿基米德求出了抛物线弓形的面积，
数学智慧令人神往。

“割之又割，以致于不可割”，
刘徽求圆面积的割圆术，
一直在耳边回响。
这使人们想起，
效率不高但才艺超群的工匠。
越过中世纪的漫漫长夜，
迎来了“机械化”的隆隆轰响。
微分的对立面“积分”
成为“以直代曲”的流水线工厂。
分割作和取极限的原理，
就是产品的统一包装。
当年德国的莱布尼茨把表示求和的拉丁字母 S 拉长
创立符号 $\int$ 为“积分”披上美丽的衣裳。
“譬如积薪，后来居上”。
李善兰在 150 年前，用汉字“积分”，
在中国表示无限积累着的无穷小量。
牛顿、莱布尼茨向纵深挺进，
将定积分、导数、原函数，
三位一体地凝聚在一个公式上。
弯曲和变化，从此不再神秘，
高等数学新纪元的钟声随之敲响。
微积分，
源远流长，世人共享。

6．微积分的成长

欧几里得几何的纯粹演绎方法，
跳不出“几何公理体系”限定的框框；
牛顿和莱布尼茨顺应时代潮流
向无限进军，大胆独创。
可是，像一切新生事物一样，
微积分也是在嘲笑中成长。
1734 年，英国贝克莱大主教说，
有一个逝去的鬼魂，招之即来，挥之即去，
那就是牛顿的无穷小量！
感谢大主教的挑刺，
微积分的基础的确有待加强。
不过，数学先贤们首先大踏步前进，
打扫战场，让胜利的旗帜骄傲地飘扬。
随后而来的欧拉、柯西，
一代又一代的数学大王，
织补天网，费尽思量。

300 年过去了,
微积分终于有了数学的坚固基石,
以严密的体系，屹立在神圣的科学殿堂。

（尾声）

时序进入 21 世纪，微积分揭去了神秘的面纱,
任人瞻仰，甚至走进中学课堂。
哲人说“世界是用微分方程写成的”,
再也没有人怀疑微积分的力量。
微积分成为现代公民的普通素养,
茶余饭后也可以谈论有限和无限,
整体和局部，常量和变量。
“会当凌绝顶，一览众山小”;
微积分，无限风光，风光无限！

附录 A　数学学习方法

数学已经成为现代人的基本素养，它会影响人的思想、思维方式等各个方面。数学的特点是它的抽象性、精确性和应用的广泛性：数学能集中、强化人们的注意力，能够给人以发明创造的精神和谨慎的谦虚精神，能够激发人们追求真理的勇气和信心，数学更能锻炼人们独立工作的精神，等等。

方法一：数形统一

恩格斯说："数学是数量关系和空间形式的科学。"

形：空间形式的科学，视觉思维占主导，培养直觉能力，培养洞察力，培养逻辑推理能力。

数：数量关系的科学，有序思维占主导，培养符号运算能力。

学习数学的时候，要注意数与形结合。数与形相结合既有助于加深理解，又有助于记忆。

方法二：审同辨异

审同辨异，即同中观异，异中观同，这是发明创造的开始。

异中观同就是抓住本质，抓住共性。领域不管相隔多远，外表有多大不同，实质可能是一样的。实质认识的越清楚，做出新发明的可能性就越大。

对同一个概念，或同一个定理，不同的人有不同的理解，其深度可能相去甚远。对数学中的重要概念，要多花一些心思去琢磨它，要借助大量丰富的例子去加深对概念内涵的理解。如何学好定理？可从以下五个方面考察：怎样发现定理；怎样证明定理；怎样理解定理；怎样应用定理；怎样推广定理。

方法三：鉴赏数学

曾获诺贝尔文学奖的美国哲学家梭罗讲，"有关真理最明晰，最美丽的陈述，最终必以数学形式展现"。数学真正成为系统化的科学开始于欧几里得的《几何原本》，这是一本很伟大的著作。从欧氏几何我们晓得，成熟而美丽的数学命题必定能够用简单的语言来叙述。这是一个对审美很重要的概念，影响了两千年来我们对数学命题最简单审美的主要开辟点。

鉴别真与假、好与坏、美与丑、重要与不重要，基本与非基本，是一件非常重要的事情。

如何培养？读一点数学史，它会给出正确的价值观。历史留下来的问题都是大浪淘沙的结果，是"淘尽污泥始见金"。与哲学相结合，哲学的思考可以提供观察问题的方法和角度，引向深入。没有哲学无法看清数学的深度，以简驭繁、反璞归真都是哲学思考。具有鉴赏力的学生才能抓住事物的本质。

数学之基础就是微积分，成功的微积分教学对学生成才是至关重要的。因为微积分不仅能使学生得到一颗颗珍珠，还能使他们得到一串珍珠，而将这些珍珠串起来的基线，就是微积分。

这门课程的主要矛盾是微分和积分。没有微积分，就没有现代化；科技的进步就是人类对微积分之美追求的结晶。

数学思想、数学方法、数学技巧三位一体，构筑了数学理论体系。数学思想是数学理论的基础，是数学理论体系的发端，并推进和提升了数学理论体系，使其更加完美；数学方法是构筑数学理论框架的工具，也是分析、判断、解决问题的工具；数学技巧能激发、开拓、深化学习者思维，训练他们，使其具有丰富的想象力和敏锐的观察力。学习好数学，重要的是要领会它的思想、掌握它的方法、熟练它的技巧。具体来说：**习题熟做三百**，即勇于实践、勤于总结、精雕细刻；**记笔记艺术化**，即记思想、记方法、记技巧；**教材精读三遍**，即数形统一、审同辨异、欣赏数学。

2005 年 11 月 20 日星期日

附录 B　有限域 Chebyshev 公钥密码算法

假设 Alice 为发送方，Bob 为接收方，通信过程如下[①]：

密钥生成：Bob 随机生成一个大素数 N，选择正整数 $x<N$ 和 $s<N$，计算 $y=T_s(x)(\bmod N)$，其中，$T_r(x)$ 为切比雪夫多项式（参见例题 2-2-22）。Bob 的公钥为 (x,N,y)，私钥为 s。

信息加密：Alice 利用 Bob 的公钥 (x,N,y)，进行如下过程的加密：

第 1 步：首先把需要加密的信息转换成正整数 $m(1<m<N)$；

第 2 步：选择一个随机数 r，使得 $r<N$ 且 $T_r^{-1}(T_s(x))(\bmod N)$ 存在。根据公钥 (x,N,y)，计算 $c_1=T_r(x)(\bmod N)$，$c_2=(m\cdot T_r(y))(\bmod N)$，然后将密文信息 $c=(c_1,c_2)$ 发送给 Bob。

信息解密：Bob 接收到密文信息 c 后，利用私钥 s 即可恢复出明文信息 $m=(c_2\cdot T_s^{-1}(c_1))(\bmod N)$

[例 B-1] 密钥生成：Bob 随机生成一个大素数 N=1749940627，选择正整数 x=25749480 和 s=7207480595，计算 $y=173359085$。Bob 的公钥为 (x,N,y)，私钥为 s=7207480595。

信息加密：假如需要加密的信息 m=11223344，Alice 随机选择一个整数 r=6431562606，计算 c_1=1399079193 和 c_2=878048528，然后将密文信息 $c=(c_1,c_2)$ 发送给 Bob。

信息解密：为了从 c 恢复信息 m，Bob 利用私钥 s 计算 $X=T_s(c_1)(\bmod N)=T_r(y)$ $X=1376040233$ 和 $m=11223344$。

[评注] 易验证 $1=525763173\times1749940627-668624590\times1376040233$，因此 $c_2X^{-1}=542560096\times1749940627+11223344$。

---

① Kocarev L,Makraduli J,Amato P.Public-Key Encryption Based on Chebyshev Polynomials[J]. Circuits and Systems Signal Processing,2005,24(5):497-517.

附录 C　人名索引

后　记

1986 年获兰州大学数学力学系理学学士学位至今，一直从事数学密码的教学科研工作。曾讲授过《高等数学》、《数学分析》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《密码学》、《概率论》、《数值分析》、《复变函数》等多门课程。1993 年 2 月，获得中国科学技术大学研究生院“密码学研究生进修班”毕业证书。1998 年 5 月，获得“第二届中央直属机关青年岗位能手”。1999 年 4 月，获得“中央办公厅第三届十大杰出青年”称号。2004 年 1 月，获北京大学计算机及应用理学学士学位（高等教育自学考试），2005 年 12 月，获北京邮电大学电信工程学院通信与信息系统专业工学博士学位（硕博连读）。2005 年 6 月，先后获得“中央办公厅优秀共产党员”和“中央直属机关优秀共产党员”称号。《线性代数》在 2009 年北京高校第六届青年教师教学基本功比赛中荣获理工 B 组比赛优秀指导教师奖。2009 年荣获北京市优秀教师称号。2007 年开始，向全体学生（含研究生）每年举办主题为“喜欢数理化，幸福你我他”的“数理文化大讲座”，与数理文化初恋的感觉真好：学数理，塑文化，获美意。2008 年开始，每两年举办“数理文化节晚会”，其主题是“有理走遍天下，无礼寸步难行”，受到领导师生好评。2010 年，率先开设全国首届《数理文化》选修课，其宗旨是“敬天爱人，以美求真”，同学们喜爱有加。2012 年，《创新数理文化，共想数理之美》荣获院级教育教学成果一等奖；2013 年出版全国首部《数理文化》教材。

我有一个观点，密码人才务求“特、信、美、严、创”，即密码人才的最大公约数就是素质独特、信念坚定、以美求真、从严要求、贵在原创，也就是：美的原创是以严格的数学为基础，奇特到难以置信。

我有一个梦想，想在微积分之美方面做一点尝试！

本基础讲义曾在北京电子科技学院 1999 年教学评价中得到北京市专家的充分肯定，并作为范例向有关院校推荐。

感谢徐津老师、李家老师及我的研究生薛飞、岳岩冰为本书制图所做的努力！同时，也衷心感谢杨波主任、裴杰编辑对本书出版提供的帮助。

杜耀刚

2017 年 12 月 23 日

参 考 资 料

[1] [英]高尔斯（Timothy Gowers）．普林斯顿数学指南》（The Princeton Companion to Mathematics）．齐民友译．北京：科学出版社，2014.

[2] 中国大百科全书总编辑部．中国大百科全书 · 数学．北京：中国大百科全书出版社，1988.

[3] [美] 莫里斯 · 克莱因．古今数学思想．上海：上海科学技术出版社，2014.

[4] 华罗庚．高等数学引论．北京：高等教育出版社，2009.

[5] 赵焕光，应裕林，章勤琼．梦想相遇无穷．北京：科学出版社，2014.

[6] 龚昇，林立军．简明微积分史．长沙：湖南教育出版社，2005.

[7] 龚昇，张声雷．简明微积分．北京：中国科学技术大学出版社，1997.

[8] 杜耀刚．数理文化．北京：电子工业出版社，2013.

[9] 张奠宙，王善平．数学文化教程．北京：高等教育出版社，2013.

[10] [美] 埃利克 · 坦普尔 · 贝尔．数学大师：从芝诺到庞加莱．上海：上海科技教育出版社，2012.

[11] [美] 克利福德 · 皮寇弗．数学之书．陈以礼译．重庆：重庆大学出版社，2015.

[12] 张筑生．数学分析新讲．北京：北京大学出版社，1995.

[13] 张天蓉．数学物理趣谈：从无穷小开始．北京：科学出版社，2015.

[14] [美] 达纳 · 麦肯齐．无言的世界．李永学译．北京：北京联合出版公司，2015.

[15] [美] 李学数．数学和数学家的故事．上海：上海科技技术出版社，2015.

[16] [美] 卡尔 · B · 波耶．微积分概念发展史．唐生译．上海：复旦大学出版社，2007.

[17] [德] 菲利克斯 · 克莱因．高观点下的初等数学（第三卷）．吴大任，陈鹓译．上海：复旦大学出版社，2008.

[18] [美] William Dunham．微积分的历程：从牛顿到勒贝格．李伯民，汪军，张怀勇译北京：人民邮电出版社，2014.

[19] 陈诗谷，葛孟曾．大数学家：从阿基米德到陈省身．北京：中国青年出版社，2012.

[20] 谢惠民．数学史赏析．北京：高等教育出版社，2014.

[21] 吴振奎．数学中的美．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.

[22] 吴振奎，吴旻，吴彬．品数学．北京：清华大学出版社，2010.

[23] 许晓根．数学美教育与数学发现．北京：北京大学出版社，2012.

[24] 张顺燕．数学的美与理．北京：北京大学出版社，2004.

[25] J. E. 李特尔伍德．数学随笔集．北京：高等教育出版社，2014.

[26] 丘成桐，刘克峰，杨乐，季理真主编．数学与人文第十七辑：数学的艺术．北京：高等教育出版社，2015.

[27] 丘成桐，刘克峰，杨乐，季理真主编．数学与人文第十二辑：百年数学．北京：高等教育出版社，2014.

[28] 卢昌海．黎曼猜想漫谈．北京：清华大学出版社，2012.

[29] 陈鼎兴．数学思维与方法：研究式教学．南京：东南大学出版社，2008.
[30] John Stillwell．数学及其历史．袁向东，冯绪宁译．北京：高等教育出版社，2011.
[31] 潘承洞，潘承彪．初等数论．3 版．北京：北京大学出版社，2013.
[32] 张广祥．数学思想十讲．北京：科学出版社，2013.
[33] 张宏时．数学如诗．苏州：苏州大学出版社，2015.
[34] 易南轩．数学美拾趣．2 版．北京：科学出版社，2004.
[35] 易南轩，王芝平．多元视角下的数学文化．北京：科学出版社，2007.
[36] [英] 蒂莫西 · 高尔斯．数学．刘熙译．南京：译林出版社，2014.
[37] 王青建．数学开心辞典．2 版．北京：科学出版社，2014.
[38] [美] 詹姆斯 · 格雷克．信息简史．高博译，北京：人民邮电出版社，2014.
[39] 蔡天新．难以企及的人物：数学天空的群星闪耀．桂林：广西师范大学出版社，2009.
[40] 蔡天新．数之书．北京：高等教育出版社，2014.
[41] 刘培杰．历届 IMO 试题集（1959～2005）．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2006.
[42] 汪晓勤．数学文化透视．上海：上海科学技术出版社，2013.
[43] 张奠宙等．情真意切话数学．北京：科学出版社，2011.
[44] 蔡志忠．时间之歌 · 东方宇宙四部曲之二．北京：商务印书馆，2010.
[45][美]约翰 · 德比希尔．素数之恋-黎曼和数学中最大未解之迷．陈为蓬译．上海：上海科技教育出版社，2014.
[46]华罗庚．谈谈与蜂房结构有关的数学问题．北京：科学出版社，2002.

反侵权盗版声明